2022/12/11

部分ベクトル空間

$$V = \mathbb{R}^n := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| \; x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

: n次元(数)ベクトル空間.

Vの部分集合 $W \subset V$ は V の 部分ベクトル空間である

$\overset{定義}{\Longleftrightarrow}$ あるベクトル $v_1, \dots, v_k \in V$ が存在して

$$W = \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k)$$

$$:= \{ \underbrace{a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k \in V}_{v_1,\dots,v_k \text{の一次結合}} \mid a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R} \}$$

とかける.

$v_1, \dots, v_k$ の一次結合.

例 $V = \mathbb{R}^3$ とする

- $W = \mathrm{Span}(e_1, e_2, e_3)$

$$= \{ a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 \mid a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \middle| \; a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

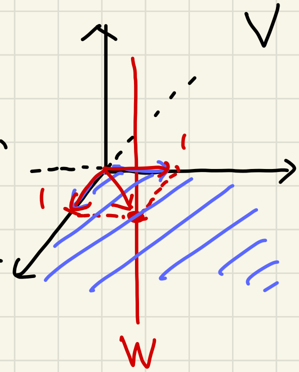
$$= \mathbb{R}^3 = V$$

: V は V の部分ベクトル空間.

- $W = \mathrm{Span}\left(v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

$$= \{ a v \mid a \in \mathbb{R} \} \subset V$$

- $W = \mathrm{Span}\left(\underset{\substack{\shortparallel \\ v_1}}{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}, \underset{\substack{\shortparallel \\ v_2}}{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}}, \underset{\substack{\shortparallel \\ v_3}}{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}} \right)$



$$= \{ a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 \mid a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a_1 + a_3 \\ a_2 + a_3 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| b_1, b_2 \in \mathbb{R} \right\} \subset V$$

$$\begin{cases} b_1 = a_1 + a_3 \\ b_2 = a_2 + a_3 \end{cases}$$

ベクトル空間の基底

ベクトル $\{v_1, \dots, v_k\}$ はベクトル空間 V の基底である.

$\overset{}{\Longleftrightarrow}$ 定義

① $\{v_1, \dots, v_k\}$ は一次独立.

② $\{v_1, \dots, v_k\}$ はベクトル空間 V を張る.

つまり $V = \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k)$ とかける.

//

例 ・ $V = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} \right) \subset \mathbb{R}^3$

$\left\{ v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} \right\}$ は V のキテイ.

$\rightsquigarrow$ ② V の定義から $V = \mathrm{Span}(v_1, v_2)$ である.

① $\{v_1, v_2\}$ は一次独立である.

$\left\{ w_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ は V の基底.

$\rightsquigarrow$ ② $w_1 = v_1 + v_2 \in V$, $w_2 = -v_1 \in V$ なので

$$\mathrm{Span}(w_1, w_2) = \mathrm{Span}(v_1, v_2) = V.$$

① $\{w_1, w_2\}$ は一次独立である. (演)

$\left\{ v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ は V の基底でない.

$\rightsquigarrow$ ① $v \neq 0$ なので一次独立

② $\mathrm{Span}(v) \neq \mathrm{Span}(v_1, v_2) = V$.

ベクトル空間の次元

V : ベクトル空間

$v_1, \dots, v_k \in V$: V の基底.

$\rightsquigarrow$

$\dim V := k$: V の次元という.

例 • $V = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\right) \subset \mathbb{R}^3$

$\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix} = v_1$, $\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix} = v_2$, $\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} = v_3$

v_1, v_2 は V の基底.

$\rightsquigarrow \dim V = 2.$

• $V = \mathrm{Span}(0) = \{0\}$

基底なし

$\rightsquigarrow \dim V = 0.$

線形写像

ベクトル空間 V, W の間の写像

$f: V \to W$ が線形写像である

$\Longleftrightarrow$ f は以下の条件 (L1), (L2) を満たす

定ぎ (L1) 任意の $v_1, v_2 \in V$ に対して

$$f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$$

(L2) 任意の $\lambda \in \mathbb{R}$, $v \in V$ に対して

$$f(\lambda v) = \lambda f(v)$$

例1 $V=\mathbb{R}^3$, $W=\mathbb{R}^2$ とする.

$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$ に対して

$f: V \to W,\ v \mapsto Av$ は

線形写像である. (演)

定理 任意の線形写像 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ に対して

$f(v)=Av$ を満たす $(m\times n)$ 行列が

唯一つ存在する.

核と像

線形写像 $f: V \to W$ に対して

$\mathrm{Ker}(f) := \{ v\in V \mid f(v)=0 \} \subset V$

を f の核といい,

$\mathrm{Im}(f) := \{ f(v)\in W \mid v\in V \} \subset W$

を f の像という. //

命題 $f: V \to W$: 線形

- $\mathrm{Ker}(f) \subset V$ は V の部分ベクトル空間.
- $\mathrm{Im}(f) \subset W$ は W の 〃 .

例 (演) $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $v \longmapsto Av$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ とする.

(1) $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathbb{R}^3$ は $\mathbb{R}^3$ の部分ベクトル空間.

$\mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{R}^2$ は $\mathbb{R}^2$ の ______ 〃 ______.

であることを示せ

(2) $\dim(\mathrm{Ker}(f))$, $\dim(\mathrm{Im}(f))$ を求めよ.

(3) $\mathrm{rank}(A)$ を求めよ.