2023.07.06.

前回の復習

$(m\times n)$行列 A

$$
\xrightarrow{\text{行基本変形}}
\begin{pmatrix}
0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & 0 & * & 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\
0 & \cdots & & & & \cdots & 0 & 1 & * & 0 & \cdots & 0 & & \vdots \\
0 & \cdots & & & & & & \cdots & & 1 & \cdots & 0 & & \vdots \\
\vdots & & & & & & & & & & & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & & & & & & & & & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * \\
 & & & & & & O & & & & & & &
\end{pmatrix}
$$

・ステップの1の上下は0.　　　rref.

Rem. $(m\times n)$行列 A に対して rref は一意的.

例 連立方程式への応用.　　定数項ゼロのとき"斉次"という

$$
\begin{cases}
x+2y+3z+u=0 \\
x-y+z-u=0 \\
3x+5z-u=0
\end{cases}
$$

を解く.

係数拡大行列

$$
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\
1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\
3 & 0 & 5 & -1 & 0
\end{array}\right)
\xrightarrow[③+①\cdot(-3)]{②+①\cdot(-1)}
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\
0 & -3 & -2 & -2 & 0 \\
0 & -6 & -4 & -4 & 0
\end{array}\right)
$$

$$\xrightarrow[\text{①}\times 3]{\text{③}\times\left(-\frac{1}{2}\right)} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 6 & 9 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{③}+\text{②}]{\text{①}+\text{②}\cdot 2} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{②}\times\left(-\frac{1}{3}\right)]{\text{①}\times\frac{1}{3}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{5}{3}s + \frac{1}{3}t \\ y = -\frac{2}{3}s - \frac{2}{3}t \\ z = s \\ u = t \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = s\underbrace{\begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=\boldsymbol{x}} + t\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}}_{=\boldsymbol{y}} \qquad (s, t \text{ は任意定数})$$

③ 非斉次な連立一次方程式

定数項がすべて0でない。

$$\begin{cases} x+y+z+u=1 \\ x+2y+z-u=2 \end{cases}$$ を解く.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{②+①\times(-1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[①+②\times(-1)]{} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & & s & t \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \end{array}$$

$$\begin{cases} x+z+3u=0 \\ y-2u=1 \end{cases} \iff \begin{cases} x=-s-3t \\ y=2t+1 \\ z=s \\ u=t \end{cases}$$

$z=s$
$u=t$

$$\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{定数項}}$$

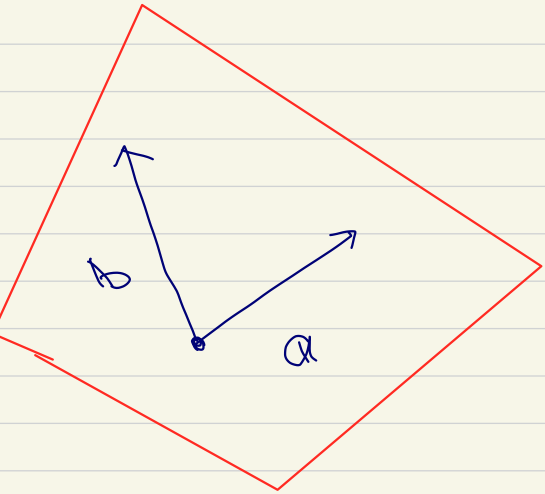
定理

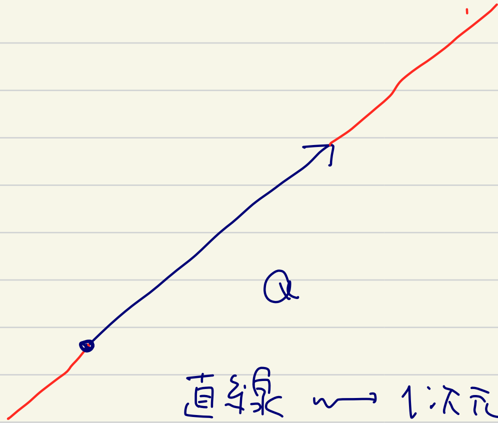
係数拡大行列

$n - \mathrm{rank}(A)$ ＝ 自由に動ける変数の個数，

連立一次方程式の変数の個数

（＝ 解空間の次元）





平面 $\rightsquigarrow$ 2次元

直線 $\rightsquigarrow$ 1次元

点 $\rightsquigarrow$ 0次元

次元の定義は線形代数2で扱う。

《行列式》

◎ 2次正方行列の行列式

determinant

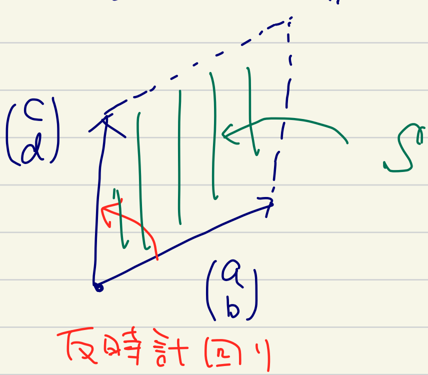
行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の行列式とは

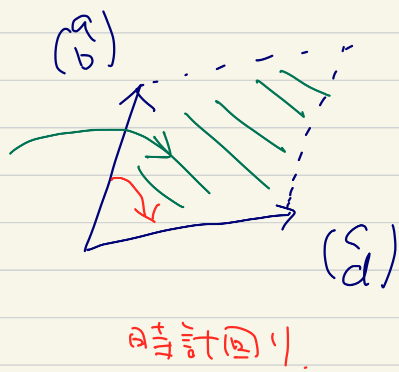
$\det A := ad - bc \in \mathbb{R}$ という値のこと.

($\det A = |A|$ とかくこともある).

◎ 幾何学意味

2つのベクトル $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ が張る平行四辺形の符号付き面積.



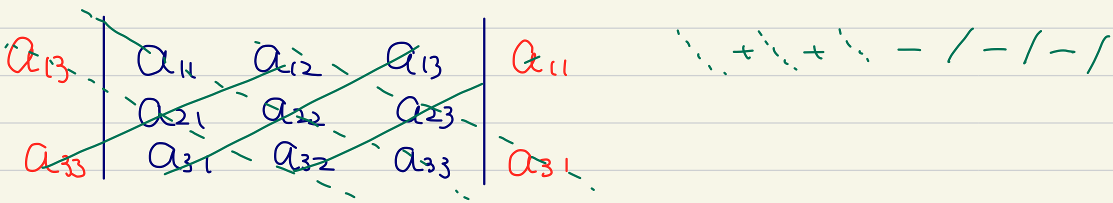


$\det A = S$ 　　　　$\det A = -S$

3次正方行列の行列式

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$ に対して

$$\det A := a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$



幾何的意味

$$x = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} \quad z = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$$

$\det(x\,y\,z)$

$=$ 平行六面体の符号付き体積