$$\{ A=(a_{ij})_{i,j} \mid A : (m\times n)\text{行列} \} \ni A$$

$$\updownarrow \; 1:1 \qquad\qquad \downarrow$$

$$\{ f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \mid f : \text{線形写像} \} \ni \quad x \longmapsto Ax$$

<u>Ex</u> $\quad f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$: 線形

- $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$
- $e_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; e_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; e_3' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$
- $f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = e_1' + 2e_2' + e_3', \quad f(e_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2e_1' + e_2' + 2e_3'$

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 e_1 + x_2 e_2 \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(x_1 e_1 + x_2 e_2) \\
&= x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) \\
&= x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + x_2 \\ x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} .
\end{aligned}$$

上のコトを一般の基底に拡張したい。つまり.

- $\mathbb{a}_1, \dots, \mathbb{a}_n \in \mathbb{R}^n$
- $\mathbb{b}_1, \dots, \mathbb{b}_m \in \mathbb{R}^m$

$\Big\}$ 基底

- $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$: 線形

$$\begin{cases} f(\mathbb{a}_1) = c_{11}\mathbb{b}_1 + \cdots + c_{m1}\mathbb{b}_m \\ \vdots \\ f(\mathbb{a}_n) = c_{1n}\mathbb{b}_1 + \cdots + c_{mn}\mathbb{b}_m \end{cases}$$

とする.

$\mathbb{x} = x_1\mathbb{a}_1 + \cdots + x_n\mathbb{a}_n \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\begin{aligned} f(\mathbb{x}) &= f(x_1\mathbb{a}_1 + \cdots + x_n\mathbb{a}_n) \\ &= x_1 f(\mathbb{a}_1) + \cdots + x_n f(\mathbb{a}_n) \\ &= (f(\mathbb{a}_1), \dots, f(\mathbb{a}_n)) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ \star\ &= (\mathbb{b}_1, \dots, \mathbb{b}_m) \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= (\mathbb{b}_1, \dots, \mathbb{b}_m) \begin{pmatrix} c_{11}x_1 + \cdots + c_{1n}x_n \\ \vdots \\ c_{m1}x_1 + \cdots + c_{mn}x_n \end{pmatrix} \begin{array}{l} =: y_1 \\ \\ =: y_m \end{array} \end{aligned}$$

$$= (\mathbb{b}_1, \dots, \mathbb{b}_m) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

$$= y_1 \mathbb{b}_1 + \cdots + y_m \mathbb{b}_m$$

行列 $\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$

を f の $\{\mathbb{a}_1, \dots, \mathbb{a}_n\}$, $\{\mathbb{b}_1, \dots, \mathbb{b}_m\}$ に関する表現行列という。

<u>Ex</u> $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$; 線形

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_1 \\ x_1 + x_2 \\ -2x_2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$$\mathbb{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

このとき f の $\{\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2\}$, $\{\mathbb{b}_1, \mathbb{b}_2, \mathbb{b}_3\}$ に関する表現行列を求めよ。

- $f(\mathbb{a}_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$, $f(\mathbb{a}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

それぞれを $\mathbb{b}_1, \mathbb{b}_2, \mathbb{b}_3$ の一次結合でかく。

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \lambda_1 \mathbf{b}_1 + \lambda_2 \mathbf{b}_2 + \lambda_3 \mathbf{b}_3 \quad \text{とおく.}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_3 \\ -\lambda_2 + \lambda_3 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \lambda_1 = -4 \\ \lambda_2 = 3 \\ \lambda_3 = 6 \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow f(\mathbf{a}_1) = -4\mathbf{b}_1 + 3\mathbf{b}_2 + 6\mathbf{b}_3$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \mu_1 \mathbf{b}_1 + \mu_2 \mathbf{b}_2 + \mu_3 \mathbf{b}_3 \quad \text{とおく}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 + \mu_3 \\ -\mu_2 + \mu_3 \\ \mu_1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \mu_1 = -4 \\ \mu_2 = 2 \\ \mu_3 = 4 \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow f(\mathbf{a}_2) = -4\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2 + 4\mathbf{b}_3$$

$$(f(\mathbf{a}_1), f(\mathbf{a}_2))$$

$$= (-4\mathbf{b}_1 + 3\mathbf{b}_2 + 6\mathbf{b}_3, -4\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2 + 4\mathbf{b}_3)$$

$$= (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

$\therefore$ f の $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$, $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ に関する表現行列は

$$\begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \quad //$$

exe.

写像 $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$; $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 3x_2 \\ x_1+x_2 \end{pmatrix}$

について.

(1) f は線形写像であることを示せ

(2) $\left\{ a_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$,

$\left\{ b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ に関する

f の表現行列を求めよ.

(3) $f(2a_1 - a_2)$ を b_1, b_2, b_3 の

一次結合で表せ.

(1) ・(L1) について.

任意の $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ 対して

$$f(x+y) = f\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(x_1+y_1) \\ 3(x_2+y_2) \\ (x_1+y_1)+(x_2+y_2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2x_1+2y_1 \\ 3x_2+3y_2 \\ x_1+x_2+y_1+y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 3x_2 \\ x_1+x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2y_1 \\ 3y_2 \\ y_1+y_2 \end{pmatrix}$$

$= f(x) + f(y)$ が成立つ.

・(L2) について

任意の $\mathbb{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して

ベクトル　　スカラー

$$f(\lambda \mathbb{x}) = f\begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda x_1 \\ 3\lambda x_2 \\ \lambda x_1 + \lambda x_2 \end{pmatrix}$$

$$= \lambda \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 3x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} = \lambda f(\mathbb{x})$$ が成立.

f は (L1) と (L2) を満たすので線形写像である.

(2) 基底 $\{\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2\}$ の行き先 $f(\mathbb{a}_1)$, $f(\mathbb{a}_2)$ を
それぞれ $\mathbb{b}_1, \mathbb{b}_2, \mathbb{b}_3$ の一次結合でかく.

$$f(\mathbb{a}_1) = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \mathbb{b}_1 + \lambda_2 \mathbb{b}_2 + \lambda_3 \mathbb{b}_3$$ を解く.

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda_1 + 2\lambda_2 \\ -\lambda_1 - \lambda_3 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = -2 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \ f(\mathbb{a}_1) = -2\mathbb{b}_2.$$

$$f(\mathbb{a}_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \mu_1 \mathbb{b}_1 + \mu_2 \mathbb{b}_2 + \mu_3 \mathbb{b}_3$$ を解く.

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mu_1 + 2\mu_2 \\ -\mu_1 - \mu_3 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu_1 = 2 \\ \mu_2 = 2 \\ \mu_3 = -5 \end{cases}$$

$$\therefore \quad f(\mathbf{a}_2) = 2\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2 - 5\mathbf{b}_3 .$$

以上から

$$(f(\mathbf{a}_1), f(\mathbf{a}_2))$$

$$= (-2\mathbf{b}_2, 2\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2 - 5\mathbf{b}_3)$$

$$= (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 2 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}}$$

f の $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$, $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ に関する表現行列は $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 2 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$ である.

(3) $f(2\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2)$

$$= 2f(\mathbf{a}_1) - f(\mathbf{a}_2)$$

(1) より

$$= (f(\mathbf{a}_1), f(\mathbf{a}_2)) \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 2 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(2) より

$$= (\mathbb{b}_1, \mathbb{b}_2, \mathbb{b}_3) \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$= -2\,\mathbb{b}_1 - 6\,\mathbb{b}_2 + 5\,\mathbb{b}_3$$

//