※ 線形写像 $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ の表現行列は
$(m \times n)$ 行列.

線形写像の核と像

Kernel　Image

<u>Def</u>（核と像）

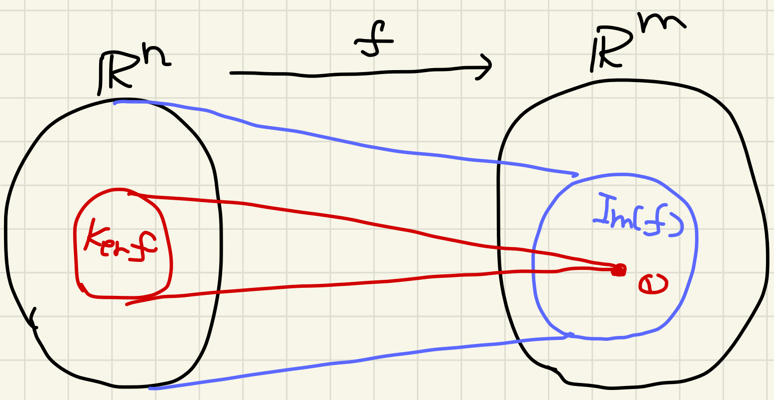
線形写像 $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ に対して

$$\mathrm{Ker}(f) := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0 \} \subset \mathbb{R}^n$$

を f の核という. また

$$\mathrm{Im}(f) := \{ f(x) \in \mathbb{R}^m \mid x \in \mathbb{R}^n \} \subset \mathbb{R}^m$$

を f の像という. //



Ex $\quad f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{x}} & \longmapsto & \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{x}} \end{array}$$

- $\mathrm{Im}(f) = \{ f(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^2 \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \} \subset \mathbb{R}^2$

$$= \{ A\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \} \subset \mathbb{R}^2$$

$$f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 + 4x_3 \\ -x_1 + 2x_2 - 4x_3 \end{pmatrix}$$

$$= x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \mathrm{Im}(f) = \left\{ x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{c} x_1, x_2, x_3 \\ \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

$$= \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} \right) \subset \mathbb{R}^2$$

※ $\mathrm{Im}(f)$ は $\mathbb{R}^2$ の部分ベクトル空間.

$$\therefore \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \quad \mathrm{Ker}(f) = \left\{ t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, t, u \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \mathrm{Span}\Bigg(\underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{一次独立}}\Bigg) \subset \mathbb{R}^3.$$

※ $\mathrm{Ker}(f)$ は $\mathbb{R}^3$ の部分ベクトル空間.

Prop 線形写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ について

- $\mathrm{Im}(f)$ は $\mathbb{R}^m$ の部分ベクトル空間.
- $\mathrm{Ker}(f)$ は $\mathbb{R}^n$ の部分ベクトル空間.

//

定理

線形写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ について

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\mathrm{Ker}(f)) = n$$

が成り立つ.

Ex. $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ (さっきの Ex.)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

- $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$
- $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$

$$\rightsquigarrow \dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\mathrm{Ker}(f))$$
$$= 1 + 2$$
$$= 3 = \dim(\mathbb{R}^3).$$

証明はあとまわし

exe. • $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

• $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$: 線形写像

$f(v_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, f(v_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, f(v_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(1) f の (v_1, v_2, v_3) に関する表現行列 A を求めよ.

(2) $\mathrm{Im}(f)$ と $\mathrm{Ker}(f)$ の基底を各々求めよ.

(1) 任意の $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ に対して

$x = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$ を満たす $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ を求める.

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = x_1 \\ \lambda_2 = x_3 \\ \lambda_3 = \lambda_1 + \lambda_2 - x_2 \\ \quad\ = x_1 + x_3 - x_2 \end{cases}$$

$$\therefore\ x = x_1 v_1 + x_3 v_2 + (x_1 + x_3 - x_2) v_3$$

$$\rightsquigarrow\ f(x) = f(x_1 v_1 + x_3 v_2 + (x_1 + x_3 - x_2) v_3)$$

$$= x_1 f(v_1) + x_3 f(v_2) + (x_1 + x_3 - x_2) f(v_3)$$

(L1), (L2)

$$= x_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + (x_1 + x_3 - x_2) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_1 - x_3 - x_1 - x_3 + x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -x_1 \\ -2x_1 + x_2 - 2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \therefore\ A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) $\mathrm{Ker}(f) = \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid f(x) = 0 \}$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{連立方程式}} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{②+2\times①} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{②+2\times③} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{①\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{span}(0) = \{0\}$ （0次元）

基底なし

$\mathrm{Im}(f) = \{ f(x) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R}^3 \}$

$$= \{ Ax \mid x \in \mathbb{R}^3 \}$$

$$= \left\{ x_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

次元定理より $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 3$

ゆえ $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\mathrm{Im}(f)$ の基底.

//