2023/11/02

復習

- $v_1, \dots, v_r \in V := \mathbb{R}^n$ に対して

$W := \underbrace{\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_r)}_{v_1,\dots,v_r\text{の一次結合全体.}} \subset V$ を V の部分線形空間という.

- $v_1, \dots, v_r \rightsquigarrow \underbrace{v_{i_1}, \dots, v_{i_k}}_{k\text{コ}}$: 一次独立

$W = \mathrm{Span}(v_{i_1}, \dots, v_{i_k})$ となるとき

$(\underbrace{v_{i_1}, \dots, v_{i_k}}_{k\text{コ}})$ を W の基底という.

- $\dim W = \underline{k}$

Prop $v_1, \dots, v_n \in V$ は V の基底であるとする

このとき任意の $v \in V$ を $(v_1, \dots, v_n)$ の一次結合での表し方は唯一つである.

Proof 今, 2通りの表示,

$v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$, $v = b_1 v_1 + \cdots + b_n v_n$ があるとする. $0 = v - v = (a_1 - b_1) v_1 + \cdots + (a_n - b_n) v_n$

$v_1, \dots, v_n$ は一次独立なので $a_1 - b_1 = \cdots = a_n - b_n = 0$

$\therefore a_1 = b_1, \dots, a_n = b_n$.

Def. (線形写像)

$m, n \in \mathbb{N}$ に対して 写像

$f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ が次の2条件を満たすとき

写像 f を 線形写像 という。

(L1) 任意の $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^m$ に対して

$$f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$$

が成り立つ。

(L2) 任意の $v \in \mathbb{R}^m$, $a \in \mathbb{R}$ に対して

(スカラー)

$$f(av) = af(v)$$

が成り立つ。

Ex.

① $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$,　線形写像

$$\begin{matrix} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 3x_2 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

② $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$　線形写像

$$\begin{matrix} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

③ $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ NOT 線形写像.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \Psi & & \Psi \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{pmatrix} \end{array}$$

線形写像は基底の行き先を決めることで決定する.

$V := \mathrm{Span}(\underbrace{v_1, \cdots, v_m}_{基底}) = \mathbb{R}^m$ とする.

線形写像 $f : V \longrightarrow W = \mathbb{R}^n$ で

$w_1 := f(v_1), \ldots, w_m := f(v_m)$ とする.

このとき 任意の $v = a_1 v_1 + \cdots + a_m v_m \in V$ の f による行き先 $f(v)$ は

$$\begin{aligned} f(v) &= f(a_1 v_1 + \cdots + a_m v_m) \\ &\underset{(L1)}{=} f(a_1 v_1) + \cdots + f(a_m v_m) \\ &\underset{(L2)}{=} a_1 f(v_1) + \cdots + a_m f(v_m) \\ &= a_1 w_1 + \cdots + a_m w_m \in W. \end{aligned}$$

Ex. ① 線形写像 $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ は,

$$f\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

を満たすとする. このとき $v = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ の行き先 $f(v)$ は？ 演

$$\begin{aligned}
f(v) &= f\left(a\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) \\
&= a f\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) + b f\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) \\
&= a\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}a\\0\\a\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\b\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\\a\end{pmatrix} \quad //
\end{aligned}$$

② $V := \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\right)$, $W := \mathbb{R}^2$

に対して線形写像 $g: V \to W$ は

$g\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $g\left(\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ を満たすとする.

$v = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} \in V$ の行き先 は？

$$v = 3\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} \in V$$

$$\rightsquigarrow f(v) = f\left(3\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\right)$$

$$= f\left(3\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right) - f\left(\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\right)$$

$$= 3f\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right) - f\left(\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\right)$$

$$= 3\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} \quad //$$

<u>Prop</u>（行列と線形写像の対応）

$(m\times n)$ 行列は $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ の線形写像を定める.
逆に $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ の線形写像 f は $(m\times n)$ 行列で表現される. （線形代数1より）

$$A = \begin{array}{c} n \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array} m \qquad (m\times n)\text{ 行列}$$

$$\rightsquigarrow f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$$\begin{array}{ccc} \Psi & & \Psi \\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \longmapsto & Ax = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \end{array}$$

f の表現行列という.

exe. 以下 $v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
とする.

(1) v_1, v_2, v_3 は一次独立であることを示せ.

(2) $V := \mathrm{Span}(v_1, v_2, v_3) = \mathbb{R}^3$ とする.

$v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in V$ を v_1, v_2, v_3 の一次結合で表せ.

(3) 線形写像 $f : V \longrightarrow \mathbb{R}^2$ は

$f(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $f(v_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $f(v_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

を満たすとする. このとき f の表現行列を求めよ.

(1) v_1, v_2, v_3 の任意の一次関係式

$c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = 0$ を考える.

$$\Rightarrow \quad c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} c_1 \\ -2c_2 + c_3 \\ c_1 + c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad c_1 = 0, \quad -2c_2 + c_3 = 0, \quad c_1 + c_3 = 0$$

$$c_2 = 0 \qquad \Leftrightarrow \ c_3 = 0$$

$\Leftrightarrow$ $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. ゆえに v_1, v_2, v_3 は一次独立.

(2) $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ を v_1, v_2, v_3 の一次結合で表す.

:$\Leftrightarrow$ $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$ を満たす

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ を決定する.

$$\rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(\Leftrightarrow) \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ -\lambda_2 + \lambda_3 \\ \lambda_1 + \lambda_3 \end{pmatrix}$$

$$(\Leftrightarrow) \quad \lambda_1 = a, \quad \lambda_3 = c - \lambda_1 = c - a, \quad \lambda_2 = \lambda_3 - b = c - a - b$$

$$\therefore \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a v_1 + (c-a-b) v_2 + (c-a) v_3 .$$

(3) 任意の $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in V$ に対して

$$\begin{aligned} f\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) &= f(a v_1 + (c-a-b) v_2 + (c-a) v_3) \\ &\underset{(L1)}{=} f(a v_1) + f((c-a-b) v_2) + f((c-a) v_3) \\ &= a f(v_1) + (c-a-b) f(v_2) + (c-a) f(v_3) \\ &= a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + (c-a-b) \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + (c-a) \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a - (c-a-b) \\ 2a + 2(c-a-b) + 3(c-a) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2a + b - c \\ -3a - 2b + 5c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$\therefore$ f の表現行列は $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ //