2023/06/29.

前回の復習

A : (m×n) 行列

$$
\xrightarrow{\text{行基本変形}}
m\left\{
\overbrace{
\begin{bmatrix}
0 & \cdots & 0 & b_1 & * & \cdots & \cdots & \cdots & * \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & b_2 & * & \cdots & \cdots & * \\
 & & & & & \ddots & & & \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & b_r & * \cdots & * \\
 & & & & O & & & &
\end{bmatrix}
}^{n}
\right.
$$

上のような形の行列を行階段型 行列という
(row echelon form)
また、階段の数 r を 行列Aのランクという.

ここから今日のはなし

$$
A \xrightarrow{\text{行基本変形}}
\begin{bmatrix}
0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & * \cdots * & 0 & * \cdots * \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & * \cdots * & \vdots & \\
 & & & & & \ddots & 0 & * \cdots * \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \;\; * \cdots * \\
 & & & & O & & &
\end{bmatrix}
$$

上のような行列を簡約行階段行列(rref)という.
(reduced row echelon form)

例

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & -2 \\ 2 & 5 & -4 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$ を rref にせよ.

$$A \xrightarrow[\text{③↔①}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & -4 & -3 \\ 3 & 4 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{②}+\text{①}\times(-2) \\ \text{③}+\text{①}\times(-3)}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{\text{①}+\text{②}\times(-2) \\ \text{③}+\text{②}\times 2}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{①}+\text{③} \\ \text{②}+\text{③}\times(-1)}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{③}\times(-1)]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad //$$

演

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ を rref にせよ.

rrefの連立一次方程式への応用

$$
\begin{cases}
x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\
\quad\quad x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\
x_1 + 2x_2 + x_3 \quad\quad = 0 \\
x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0
\end{cases}
$$

$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$ 以外の解はあるか？

$$
A = \left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 1 & -1 & 3 & 0 \\
0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\
1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 3 & 1 & 1 & 0
\end{array}\right)
\rightsquigarrow
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
$$

係数拡大行列　　　　rref

$$
\begin{cases}
x_1 = 0 \\
x_2 = -x_4 \\
x_3 = +2x_4 \\
0 = 0
\end{cases}
\iff
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 0 \\ -t \\ 2t \\ t \end{pmatrix}
= t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

$x_4 = t$ とする

x_4は何でもよいということ.

(tは任意定数)

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ 3x+y+4z=4 \\ x-y+2z=3 \end{cases}$$ について.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[③+①\times(-1)]{②+①\times(-3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[①\times 2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{①+② \\ ③+②\times(-1)}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[②\times(-\frac{1}{2})]{①\times\frac{1}{2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3/2 & 2 \\ 0 & 1 & -1/2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{cases} x+\frac{3}{2}y=2 \\ y-\frac{1}{2}z=-2 \\ 0=-1 \end{cases}$$

おかしい.

したがって解なし //

演習

$$\begin{cases} x-2y+z-w=0 \\ 2x-y+w=0 \\ 3x+5z-2w=0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[③+①\cdot(-3)]{②+①\cdot(-2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[①\cdot 3]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -6 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[③+②\cdot(-2)]{①+②\cdot 2} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[②\times 3]{①\times 6} \left(\begin{array}{cccc|c} 18 & 0 & -6 & 18 & 0 \\ 0 & 9 & -6 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[②+③]{①+③} \left(\begin{array}{cccc|c} 18 & 0 & 0 & 13 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} 18x+13w=0 \\ 9y+4w=0 \\ 6z-5w=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=-\frac{13}{18}w \\ y=-\frac{4}{9}w \\ z=\frac{5}{6}w \end{cases}$$

$w=t$ とおく。

$$\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -\frac{13}{18} \\ -\frac{4}{9} \\ \frac{5}{6} \\ 1 \end{pmatrix}$$

(tは任意定数)

//