前回の復習　　$V := \mathbb{R}^n$

- $v_1, \dots, v_k \in V$ に対して
$W := \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k) \subset V$ を V の部分ベクトル空間という.
  - $\mathrm{Span}(\mathbf{0}) = \{\mathbf{0}\} \subset V$: $\mathbf{0}$のみ
  - $\mathrm{Span}(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) = V$: 自分自身.

  これらも V の部分ベクトル空間である.

- $\dim W := \begin{pmatrix} W\text{から取り出せる一次独立な} \\ \text{ベクトルの最大個数} \end{pmatrix}$.

Def. $v_1, \dots, v_k \in W$ が以下の2条件

- $\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k) = W$
- $v_1, \dots, v_k$ は一次独立.

を満たすとき $v_1, \dots, v_k$ を W の基底という.

Ex. $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ とする

$W := \mathrm{Span}(v_1, v_2, v_3) \subset \mathbb{R}^3$

- v_1 は一次独立.
- v_1, v_2 は一次独立

- v_1, v_2, v_3 は一次従属

$$\rightsquigarrow W = \mathrm{Span}(\underbrace{v_1, v_2, v_3}_{\text{一次従属}}) = \mathrm{Span}(\underbrace{v_1, v_2}_{\text{一次独立}})$$

$\underbrace{v_1, v_2}_{2つ}$ は W の基底。 $\rightsquigarrow$ $\dim W = 2$

Wの基底から出発してVの基底を構成できない？

<u>Ex</u> $V = \mathbb{R}^3 \supset W = \mathrm{Span}\Bigg(\underbrace{\overset{w_1}{\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}}, \overset{w_2}{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}}}_{\text{一次独立}}\Bigg)$

とする。どのような $v \in V$ をとれば…

w_1, w_2, v が V の基底になる？ 演

$\rightsquigarrow$ 答 Vの零でないベクトルvであって

$v \notin W$ となるものをとればよい！

たとえば

$v = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \in V$ は $v \notin W$.

<u>Prop</u> $W := \mathrm{Span}(\underbrace{w_1, \dots, w_k}_{\text{一次独立}}) \subsetneq V = \mathbb{R}^n$ とする。

このとき $0 \neq v \in V$ かつ $v \notin W$ ならば…

$w_1, w_2, \dots, w_k, v$ は一次独立である。

Proof. 演

任意の一次関係式 $c_1 w_1 + \cdots + c_k w_k + c_{k+1} v = \mathbb{0}$

を考える。

$c_{k+1} v = c_1 w_1 + \cdots + c_k w_k$ でもし $c_{k+1} \neq 0$

なら $v = \frac{c_1}{c_{k+1}} w_1 + \cdots + \frac{c_k}{c_{k+1}} w_k$ となって

$v \notin W$ であることに反する。ゆえ $c_{k+1} = 0$

$\rightsquigarrow c_1 w_1 + \cdots + c_k w_k = \mathbb{0}$

$w_1, \cdots, w_k$ は一次独立だから $c_1 = \cdots = c_k = 0$

以上より $c_1 = \cdots = c_k = c_{k+1} = 0$ で

$w_1, \cdots, w_{k+1}, v$ は一次独立。 ▨

Thm (基底の延長定理)

$V = \mathbb{R}^n$ とその部分ベクトル空間 W を考える。

$w_1, \cdots, w_k \in W$ を W の基底とする。このとき

$w_1, \cdots, w_k$ に適当に V のベクトルを追加すること
(上手に)
により V の基底まで延長できる。 //

Proof

$w_1,\dots,w_k$ にどのベクトル $v\in V$ を追加しても一次従属になるときは、$W=V$ のときである。ゆえに何もすることないから、ここでは $W\subsetneq V$ であると仮定してよい。

このとき零でないベクトル $v_{k+1}\in V$ であって $v\notin W$ となるものがとれる。このとき $w_1,\dots,w_k,v_{k+1}$ は一次独立になる。(上のProp)

$W\subset W_1 := \mathrm{Span}(w_1,\dots,w_k,v_{k+1})$ として、

$W_1\neq V$ なら $0\neq v_{k+2}\in V$ かつ $v_{k+2}\notin W_1$ となる v_{k+2} をとる。このとき

$w_1,\dots,w_k,v_{k+1},v_{k+2}$ は一次独立。

ここで $W_2 := \mathrm{Span}(w_1,\dots,w_k,v_{k+1},v_{k+2}) = V$ ならおわり。そうでないなら再び上記の手順をくり返せばよい。 ∎

次回以降は線形写像のはなし。

(線形代数1の復習をしておくこと).

exe. $W := \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \subset \mathbb{R}^4$

とする

(1) Wの基底を1組答えよ.

(2) $\dim W = ?$

(3) (1)で得た基底を延長して$\mathbb{R}^4$の基底を1組答えよ.