前回の復習

$V := \mathbb{R}^n$: n次元ベクトル空間.

- **Def** (一次結合)

ベクトル $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ の 一次結合 とは

$$c_1 v_1 + \cdots + c_k v_k \in \mathbb{R}^n \quad (c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R})$$

の形で表されるベクトルのことをいう. //

- $\underbrace{c_1 v_1 + \cdots + c_k v_k}_{v_1, \dots, v_k \text{の線形結合}} = 0$ という形の式を 一次関係式 という.

特に $0 \cdot v_1 + \cdots + 0 \cdot v_k = 0$ を 自明な 一次関係式という.

自明な = あたりまえな

- $v_1, \dots, v_k \in V$ は 一次独立

:⟺ $v_1, \dots, v_k$ は非自明な一次関係式をもたない!

- 〃 は 一次従属

:⟺ $v_1, \dots, v_k$ は非自明な一次関係式をもつ.

Prop 零ベクトルでないベクトル $v \in V$ は一次独立である.

Proof. 演 v の任意の一次関係式 $cv = 0$ を考える. $c \neq 0$ ならば $v = 0$ となり零ベクトルでないことに反する.
ゆえに $c = 0$. つまり v は一次独立 ∎.

(iii) 部分ベクトル空間とその次元.

Def (部分ベクトル空間)

$V := \mathbb{R}^n$ のベクトルの組 $\{v_1, \cdots, v_k\}$ に対して, これらの一次結合の全体

$$\mathrm{Span}(v_1, \cdots, v_k) := \left\{ c_1 v_1 + \cdots + c_k v_k \,\middle|\, c_1, \cdots, c_k \in \mathbb{R} \right\}$$

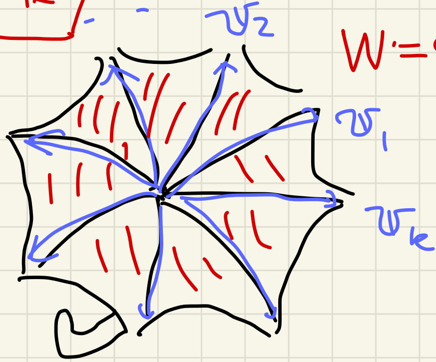
を $\{v_1, \cdots, v_k\}$ によって張られる V の部分ベクトル空間という.

(spanned スパン)

//

イメージ

$V=\mathbb{R}^n$



$W:=\mathrm{Span}(v_1,\dots,v_k)$

$\mathbb{R}^n$
$\cup$

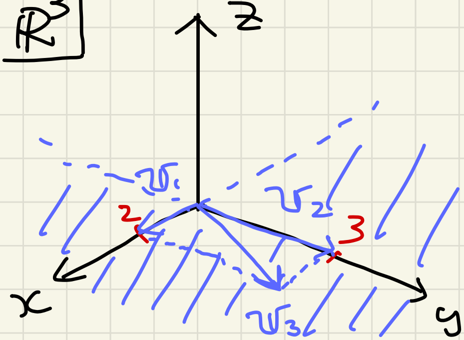
"ベクトルの組 $\{v_1,\dots,v_k\}$ が部分ベクトル空間 W を張る"

傘の骨　　　　　　　　　　　　傘

Ex. ① $v_1=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$, $v_2=\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}$, $v_3=\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$

$$\mathrm{Span}(v_1,v_2,v_3)=\left\{c_1\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}\;\middle|\; c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}\right\}$$

$\boxed{\mathbb{R}^3}$



$W:=\mathrm{Span}(v_1,v_2,v_3)$
$=\mathrm{Span}(v_1,v_2)$
$=xy$-平面.

W は $\mathbb{R}^2$ とみなすことができた.

W の"基準"として $\{v_1,v_2\}$ でよいが…

② $V = \mathbb{R}^n$ に対して

- $W := \mathrm{Span}\{0\} = \{0\} \subset V$ ：零ベクトルのみ
- $W := \mathrm{Span}\{e_1, \dots, e_n\} = V$ ：V 自身

は 自明な 部分ベクトル空間という.

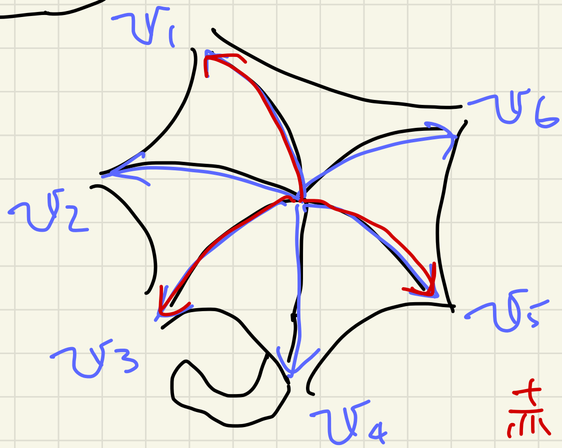
Def (部分ベクトル空間の次元)

$v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ に対して、$\mathbb{R}^n$ の部分ベクトル空間

$W := \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k) \subset \mathbb{R}^n$ を考える。

W から取り出せる一次独立なベクトルの最大の個数を $\dim W$ とかき、W の次元という。 //

(イメージ)



$$\mathrm{Span}(\overbrace{v_1, \dots, v_6}^{\text{一次従属}}) = \mathrm{Span}(\underbrace{v_1, v_3, v_5}_{\text{一次独立}}) = \mathbb{R}^3$$

赤のみでギリ傘を張れる

Ex. $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

$W := \mathrm{Span}(v_1, v_2, v_3) \subset \mathbb{R}^3$ とする.

$\dim W$ を求めよう.

Idea: v_1 から始めてベクトルを追加して一次独立になるものをえらんでいく.

$v_1 \neq 0$ は一次独立 ← 今日のprop を参照.

$\{v_1, v_2\}$ は？

⇝ v_1, v_2 の任意の一次関係式

$c_1 v_1 + c_2 v_2 = 0$ を考える.

$$c_1\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}c_1 + c_2\\c_2\\3c_1 + 2c_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \iff c_1 = c_2 = 0$$

∴ v_1, v_2 は一次独立.

$\{v_1, v_2, v_3\}$ は？

⇝ $v_1 + v_2 - v_3 = 0$ より一次従属.

ゆえに $W = \mathrm{Span}(v_1, v_2, v_3)$

$= \mathrm{Span}(v_1, v_2)$. $\ni v_3$

$\because\ v_3 = v_1 + v_2$

$\dim W = 2$ //

exe. 次の部分ベクトル空間 W の次元を求めよ.

(1) $W := \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \right) \subset \mathbb{R}^2$

(2) $W := \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \subset \mathbb{R}^3$

(3) $W := \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \subset \mathbb{R}^3$

exe. の答え

(1)

① $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \neq 0$ は一次独立

② $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ は一次従属.

なぜなら $1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$.

③ $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ は一次従属.

なぜなら $3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = 0$.

ゆえに $W = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ で $\dim W = 1$ //

(2) ① $\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} \neq \mathbf{0}$ は一次独立

② $\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\8\\0\end{pmatrix}$ は一次従属

$\because$ $4\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix}4\\8\\0\end{pmatrix} = \mathbf{0}$

③ $\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\10\\0\end{pmatrix}$ は一次従属

$\because$ $5\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix}5\\10\\0\end{pmatrix} = \mathbf{0}$.

④ $\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\-6\\0\end{pmatrix}$ は一次従属.

$\because$ $3\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}-3\\-6\\0\end{pmatrix} = \mathbf{0}$.

ゆえに $W = \mathrm{Span}\left(\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\right\}\right)$ となり $\dim W = 1$

(3) ① $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \neq \mathbf{0}$ は一次独立.

② $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ はどうか?

任意の一次関係式 $c_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} = \mathbf{0}$

$(c_1, c_2 \in \mathbb{R})$ を考える.

$$\begin{pmatrix} c_1+2c_2 \\ c_2 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \therefore\ c_1 = c_2 = 0$$

ゆえに一次独立.

③ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ はどうか?

任意の一次関係式 $c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

$(c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R})$ を考える.

$$\begin{pmatrix} c_1+2c_2 \\ c_2+3c_2 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff c_1 = c_2 = c_3 = 0$$

ゆえに一次独立

①〜③から $\dim W = 3$. で $W = \mathbb{R}^3$.