2023/06/22

決定形の連立方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$\iff \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \iff A\mathbb{x} = \mathbb{b}$$

A に "行基本変形" を施すことで単位行列にできる.

⟺ A に いくつかの正則行列をかける ことで "

例

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = -1 \\ x_1 - x_2 = 2 \end{cases} \iff \overset{A}{\overset{/\!/}{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\underbrace{①\leftrightarrow②}_{\alpha_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\underbrace{②+①\times(-2)}_{\alpha_2}]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\underbrace{②\div 5}_{\alpha_3}]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\xrightarrow[\alpha_4]{①+②} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =: E_2$$

行基本変形 α に対応する行列を E_α とかく.

$E_\alpha :=$ "単位行列 E に α を施した行列"

例

$$E_{\alpha_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_{\alpha_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/5 \end{pmatrix}$$

$$E_{\alpha_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad E_{\alpha_4} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$E_{\alpha_4}E_{\alpha_3}E_{\alpha_2}E_{\alpha_1}A = E_2$ となることを確かめよ.

$$E_{\alpha_1}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$E_{\alpha_2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$E_{\alpha_3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{\alpha_4}\begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}}_{= E_2} \quad //$$

$\boxed{\begin{array}{l}\text{正則な行列 } A \text{ に対して.}\\ E_{\alpha_n}\cdots E_{\alpha_1}A = E \text{ となるような}\\ \text{正則行列 } E_{\alpha_1},\dots,E_{\alpha_n} \text{ が存在する.}\end{array}}$

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

$$E_{\alpha_n}\cdots E_{\alpha_1}A\boldsymbol{x} = E_{\alpha_n}\cdots E_{\alpha_1}\boldsymbol{b}$$

$$\underbrace{E\boldsymbol{x}}_{= \boldsymbol{x}} = \underbrace{E_{\alpha_n}\cdots E_{\alpha_1}}_{= A^{-1}}\boldsymbol{b}$$

《行列のランクと連立1次方程式の解の個数》

※これからは必ずしも解が1つに定まらないものを考察する。

◎ 階段行列

すべての行列 A に対して行基本変形を行うことで次のような行列にできる。

$b_1, \dots, b_r$ は零でない

$$
\begin{pmatrix}
0 \cdots 0 & b_1 & * & \cdots & \cdots & \cdots & * \\
0 \cdots \cdots & 0 & b_2 & * & \cdots & \cdots & * \\
0 \cdots \cdots & \cdots & 0 & b_3 & * & \cdots & * \\
 & & & & \ddots & & \\
0 \cdots \cdots & & & & 0 & b_r & * \cdots * \\
 & & & O & & &
\end{pmatrix}
$$

このような行列を階段行列という。
また階段の数 r を行列 A のランク
といい $r = \mathrm{rank}(A)$ とかく。

例

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ を階段行列に変形せよ.

$$A \xrightarrow[\substack{③-① \\ ④-①}]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{①+②\times -1 \\ ③+②\times -1 \\ ④+②\times -2}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{①+③\times 2 \\ ②+③\times -1}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{rank}(A) = 3$

演

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

を階段行列にせよ.

答

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$