山口航平　HP: https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~d20003j/index.html

2023/04/12
(第1回)

Def : 定義
Thm : 定理
Prop : 命題
Lem : 補題
Cor : 系
Ex : 例
Rem : 注釈

すべて使うか分からんが一応…

線型代数 (linear algebra)

= 線型空間(ベクトル空間)とその上の線型写像の理論

線型代数では主に
・ベクトル ∈ 線型空間
・行列 = 線型写像
を扱う.

上の概念は"情報科学におけるデータ構造の元祖"

建物や橋の設計&強度計算
車や飛行機の空気抵抗
⋮ etc.
⟶ 偏微分方程式

⟶ 行列の計算に帰着 ⟶ コンピュータで処理.

というフローがよくある話.

§1.1 行列の定義

Def. mn コの数（または文字） $(m,n\in\mathbb{N})$

$$a_{ij} \quad (1\le i\le m,\ 1\le j\le n)$$

を次のように長方形に並べてカッコでくくったものを
m行n列の行列という.

ヨコが行
タテが列

$$A := \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & \cdots & j & \cdots & n \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \cdots & \cdots & a_{ij} & \cdots & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array}$$

第i行　第j列

a_{ij} を Aの (i,j) 成分と呼ぶ.

$$M_{m,n}(\mathbb{K}) := \left\{ (a_{ij}) \;\middle|\; \begin{array}{l} 1\le i\le m \\ 1\le j\le n \\ a_{ij}\in\mathbb{K} \end{array} \right\}$$

Aのことを $\left\{ \begin{array}{l} m\times n \text{ 型行列} \\ m\times n \text{ 行列} \\ (m,n) \text{ 行列} \end{array} \right.$ と呼んだりする.

ex. 次の行列Aについて以下答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 7 & 3 \\ 3 & 0 & 9 & 2 & 1 \\ 1 & 7 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

(1)　Aの(2,3)成分　(2)　Aの第3行

(3)　Aの第4列

これから a_{ij} を (i,j) 成分とする行列 A を

$$A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le m}} = (a_{ij})_{i,j}$$

と略記する.

§1.2 様々な行列たち

◎ 零(ゼロ)行列

$$O := \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

すべての成分 0.

コメント: $m, n \in \mathbb{N}$ に対して $m\times n$ 型のゼロ行列が定まるので同じゼロ行列でも型によって異なる! 特に $m\times n$ 型であることを強調することがない限り O とかいてしまう.

◎ 正方行列

$n\times n$ 型の行列を n 次の正方行列という.

$$n\left\{\overbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}^{n}\right.$$

対角成分という.

• 対角行列

正方行列であって対角成分以外の成分が皆 0 である行列のこと.

$$\begin{pmatrix} c_1 & & & O \\ & c_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & c_n \end{pmatrix} \left(=: \mathrm{diag}(c_1, \ldots, c_n) \right.$$

$\left.\right)$ とかいたりする.

- 単位行列

対角成分が皆1である対角行列のこと.

$$E_n := \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = (\delta_{ij})_{i,j}$$

n 次正方行列であることを表す. 単に E とかくこともある.

クロネッカーの δ(デルタ)記号

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$$ と定義する

(便利なのでいろんなとこで登場する.)

◎ 転置行列

行列 A に対して, 行と列を入れ換えた行列を A の転置行列といい, ${}^tA$ とかく.

$$A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}} = \begin{array}{c} \overbrace{\hphantom{a_{11}\ a_{12}\ \cdots\ a_{1n}}}^{n} \\ \left.\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\right\} m \end{array}$$

$$\rightsquigarrow {}^tA := (a_{ji})_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}} = \begin{array}{c} \overbrace{\hphantom{a_{11}\ a_{21}\ \cdots\ a_{m1}}}^{m} \\ \left.\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\right\} n \end{array}$$

• 対称行列 … ${}^tA = A$ を満たす行列 A のこと.

例

$$A=\begin{pmatrix}1&5&9\\5&2&4\\9&4&3\end{pmatrix}$$

他の例をつくれ

• 交代行列 … ${}^tA = -A$ を満たす行列 A のこと.

例

$$A=\begin{pmatrix}0&5&9\\-5&0&4\\-9&-4&0\end{pmatrix}$$

〃

行ベクトルと列ベクトル

$$\overbrace{(* \cdots *)}^{n}$$

$1\times n$ 行列を n 次の行ベクトル.

$n\times 1$ 行列を n 次の列ベクトルという

$$n\left\{\begin{pmatrix}*\\ \vdots\\ *\end{pmatrix}\right.$$

行・列ベクトルを用いて行列を次のように表すこともできる.

$\mathbf{a}_1$

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}$$

$\mathbf{a}_i = (a_{i1}\ \ a_{i2}\ \cdots\ a_{in})$ 行ベクトル

$$\mathbf{a}'_i = \begin{pmatrix}a_{1i}\\a_{2i}\\\vdots\\a_{mi}\end{pmatrix}$$ 列ベクトル

$$\rightsquigarrow \quad A = \begin{pmatrix}\mathbf{a}_1\\ \vdots\\ \mathbf{a}_m\end{pmatrix} = (\mathbf{a}'_1 \cdots \mathbf{a}'_n)$$