⑪ 数ベクトルと演算

Def. (数ベクトル)

n 個の実数の組 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ を n 次元の数ベクトルという。 $\boldsymbol{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ と略記することもある。

以下、数ベクトルを単にベクトルという。 //

特にすべての成分が 0 であるベクトル $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ を零(ゼロ)ベクトルといい $\mathbb{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ とかく。

Def. (ベクトルの演算)

実数の集合

$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して

- $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$ (加法)
- $\lambda \boldsymbol{x} := \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$ (スカラー倍)

//

$$\mathbb{R}^n := \{n\text{次元数ベクトル}\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| \; x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

n次元数ベクトル空間という.

Def. (基本単位ベクトル)

$$e_i := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow i\text{ th.} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \in \mathbb{R}^n$$

: 第i成分が1で他が0のベクトル.

//

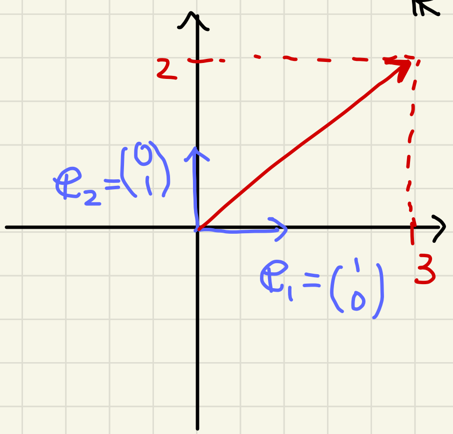
- 任意のベクトル $x \in \mathbb{R}^n$ は ある実数 $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ が一意的に存在して

$$x = a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n$$

とかける.

Ex (n=2)

$\mathbb{R}^2 \ni \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ に対して



$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 3e_1 + 2e_2$$

• 基本単位ベクトルは $\mathbb{R}^n$ の"基準"のような存在

→ e_i たちの他にも"基準"にできるベクトルたちがある.

(基底)

ベクトルの線形独立性

(一次)

<u>Def</u> (数ベクトルの線形独立性)

• $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{R}^n$ が線形独立

:$\Leftrightarrow$ $c_1 v_1 + \cdots + c_r v_r = 0$ ならば

$(c_1, \dots, c_r) = (0, \dots, 0)$ である.

• $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{R}^n$ が線形従属

:$\Leftrightarrow$ ある $(c_1, \dots, c_r) \neq (0, \dots, 0)$ に対して

$\underbrace{c_1 v_1 + \cdots + c_r v_r = 0}_{\text{非自明な1次関係式}}$ となる //

Ex. • $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ は1次独立.

$c_1 e_1 + c_2 e_2 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ //

• $v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ は 1次従属

∵ $$c_1 v_1 + c_2 v_2 = \mathbf{0}$$

$$\begin{pmatrix}c_1 + 2c_2\\2c_1 + 4c_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c}1 & 2 & 0\\2 & 4 & 0\end{array}\right) \xrightarrow[②\div 2]{} \left(\begin{array}{cc|c}1 & 2 & 0\\1 & 2 & 0\end{array}\right) \xrightarrow[-①+②]{} \left(\begin{array}{cc|c}1 & 2 & 0\\0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

$c_1 \quad \underset{k}{\overset{}{c_2}}$, $c_2 = k$

$$\rightsquigarrow \begin{cases}c_1 = -2k\\c_2 = k\end{cases} \quad (k：任意定数)$$

$$\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} \quad (k=1) \text{ のとき}$$

$-2v_1 + 1 \cdot v_2 = 0$ と非自明な1次関係式をもつ。

ex. 次のベクトルたちの線形独立性を判定せよ。

(1) $v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

(2) $v = (3) \in \mathbb{R}^1$

(3) $v_1 = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix}6\\9\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

ex. の解答

(1) $c_1 v_1 + c_2 v_2 = \mathbb{0}$ $(c_1, c_2 \in \mathbb{R})$ とする

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} c_1 + 3c_2 \\ 2c_1 + c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} c_1 + 3c_2 = 0 \\ 2c_1 + c_2 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} c_1 = -3c_2 \\ c_2 = -2c_1 \end{cases}$$

$\Longleftrightarrow (c_1, c_2) = (0, 0)$ ゆえ、v_1, v_2 は線形独立.

(2) $c v = \mathbb{0}$ とする $(c \in \mathbb{R})$

$$\Longleftrightarrow c(3) = \mathbb{0}$$

$$\Longleftrightarrow (3c) = (0)$$

$$\Longleftrightarrow 3c = 0$$

$$\therefore c = 0$$

ゆえ v は線形独立.

(3) $c_1 v_1 + c_2 v_2 = \mathbb{0}$ とする. $(c_1, c_2 \in \mathbb{R})$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2c_1 + 6c_2 \\ 3c_1 + 9c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\iff \quad c_1 = -3c_2$

$\therefore \quad (c_1, c_2) = (-3k, k)$ 　kは任意定数

$-3v_1 + v_2 = 0$ などから v_1, v_2 は
線形従属

//