前回の復習

A: n次正方行列.

Aは対角化可能である

$:\Longleftrightarrow$ ある正則行列Pが存在して

$$P^{-1}AP = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 & & & O \\ & b_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & b_n \end{pmatrix}}_{\text{対角行列}}$$ を満たす.

どんな行列も対角化できるわけではない.

Thm $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$: Aの相異なる固有値 $(r \leq n)$

Aは対角化可能である

$$\Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{r} \dim(\underbrace{W(\lambda_k)}_{\text{固有値 }\lambda_k\text{ の固有空間}}) = n$$

Aの対角化

A: 対角化可能

① λ_k $(k=1,\cdots,n)$: Aの固有値

② v_k $(k=1,\cdots,n)$: λ_kの固有ベクトル

$(Av_k = \lambda_k v_k)$

③ $P = (v_1, \cdots, v_n)$とする (n次正方行列)

$$\rightsquigarrow \quad AP = (A\boldsymbol{v}_1 \ A\boldsymbol{v}_2 \ \cdots \ A\boldsymbol{v}_n)$$

$$= (\lambda_1\boldsymbol{v}_1 \ \lambda_2\boldsymbol{v}_2 \ \cdots \ \lambda_n\boldsymbol{v}_n)$$

$$= (\boldsymbol{v}_1 \ \boldsymbol{v}_2 \ \cdots \ \boldsymbol{v}_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$AP = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

§. 対角化の応用.

問　$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ の n 乗 A^n を求めよ.

A を対角化する

$$\phi_A(t) = \det(tE_2 - A)$$

$$= \begin{vmatrix} t-3 & -1 \\ -2 & t-2 \end{vmatrix}$$

$$= (t-3)(t-2) - 2$$

$$= t^2 - 5t + 4$$

$$= (t-1)(t-4)$$

$\therefore$　1, 4 は A の固有値

固有値 1

$$\begin{pmatrix} 1-3 & -1 \\ -2 & 1-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff -2x_1 - x_2 = 0$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$W(1) = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$$

固有値 4

$$\begin{pmatrix} 4-3 & -1 \\ -2 & 4-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1 - x_2 = 0$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$W(4) = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ とすると $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

となる　　　　　　　　$\parallel$ D

$$A = PDP^{-1} \qquad \left(P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$A^n = (PD\cancel{P^{-1}})(\cancel{P}D\cancel{P^{-1}})\cdots(\cancel{P}DP^{-1})$$

$$= PD^nP^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1^n & \\ & 4^n \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \\ & 4^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 4^n \\ -2 & 4^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+2\cdot 4^n & -1+4^n \\ -2+2\cdot 4^n & 2+4^n \end{pmatrix}$$

//