§ 行列の対角化

Def（同値な行列）

2つの正方行列 A, B が同値である

$:\Longleftrightarrow$ ある正則行列 P が存在して

$$B = P^{-1}AP$$ となる。

例 $V = \mathbb{R}^2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

① $\overset{?}{=}$ ②

つまり任意の $x \in V$ に対して

$$Bx = P^{-1}APx$$

$$(\Longleftrightarrow \ B = P^{-1}AP)$$

となる正則行列 P が

あるか？

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r, mapsto] & Ax \\
V \arrow[r] \arrow[u, phantom, "\rotatebox[origin=c]{90}{$\in$}"] & V \arrow[u, phantom, "\rotatebox[origin=c]{90}{$\in$}"] \\
V \arrow[r] \arrow[u, "P"] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowright"] \arrow[r, bend right, "①"'] \arrow[r, bend left=80, "②"] & V \arrow[u, "P"'] \\
x \arrow[r, mapsto] \arrow[u, phantom, "\rotatebox[origin=c]{90}{$\in$}"] & Bx \arrow[u, phantom, "\rotatebox[origin=c]{90}{$\in$}"]
\end{tikzcd}$$

$\mapsto$ この場合はある！

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \left(P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

Def（行列の対角化）

正方行列 A に対して $B=P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P と対角行列 B を求めることを行列 A の対角化という.

例 $A=\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}$ に対して

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}$$ となる

正則行列 P と λ_1, λ_2 を求めよ.

答え $P=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$, $P^{-1}=\begin{pmatrix}0&1\\1&-1\end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}P^{-1}AP&=\begin{pmatrix}0&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}0&3\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}3&0\\0&1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Rem どんな正方行列 A に対しても対角化できるとは限らない.

⇝ 行列 A がある対角行列と同値であるとき (A が対角化できるとき) A は対角化可能であるという.

今日のゴール

- 与えられた行列が対角化可能か判定できる.
- 具体的に対角化の計算ができる.

Thm A : $(n\times n)$ 行列

$\lambda_1, \dots, \lambda_r$: A の相異なる固有値

「A は対角化可能である」

$\Leftrightarrow$ 「$\displaystyle\sum_{k=1}^{r} \dim(W(\lambda_k)) = n$」

Proof $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$: (2×2) 行列 のときのみ示す.

($\Rightarrow$) A は対角化可能であるとする. つまり

正則行列 $P = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ が存在して

$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} d_1 & \\ & d_2 \end{pmatrix}$ となる.

$$AP = P\begin{pmatrix} d_1 & \\ & d_2 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} ax+bz \\ cx+dz \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} ay+bw \\ cy+dw \end{matrix}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} d_1 x \\ d_1 z \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} d_2 y \\ d_2 w \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

$$\underline{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = d_1\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}} \qquad \underline{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ w \end{pmatrix} = d_2\begin{pmatrix} y \\ w \end{pmatrix}}$$

つまり $\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ w \end{pmatrix}$ はそれぞれ A の d_1, d_2 の固有ベクトルである. また P は正則行列なので $\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ w \end{pmatrix}$ は1次独立.

(i) A の固有値が1つのとき $\underline{\underline{\lambda}}$

$$d_1 = d_2 = \lambda$$

$$W(\lambda) = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ w \end{pmatrix}\right)$$

$$\therefore \dim(W(\lambda)) = 2.$$

(ii) A の固有値が2つのとき $\underline{\underline{\lambda_1, \lambda_2}}$

$d_1 = \lambda_1$, $d_2 = \lambda_2$ だったとすると,

$$W(\lambda_1) = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}\right), \quad W(\lambda_2) = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} y \\ w \end{pmatrix}\right)$$

$$\therefore \dim(W(\lambda_1)) + \dim(W(\lambda_2)) = 2. \quad //$$

($\Leftarrow$) は省略.

証明から分かるように, A を対角化する正則行列 P は A の固有ベクトルを並べて得られる.

演 次の行列は対角化可能か?
もし可能なら対角化せよ.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$