§ 固有値と固有ベクトル

・ $V := \mathbb{R}^n$ 　 n次元ベクトル空間

・ $f : V \to V \ ; \ x \mapsto Ax$ 　 (A: $(n \times n)$ 行列)

Def (固有値, 固有ベクトル)

$\lambda \in \mathbb{R}$ が f (A) の固有値であるとは, 0 でないベクトル $v \in V$ が存在して

$$f(v) = \lambda v \quad (Av = \lambda v)$$

が成り立つことをいう. このとき v は固有値 λ を持つ固有ベクトルであるという.

Ex. 　・ $V := \mathbb{R}^2$

・ $f(x) := \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} x \qquad (x \in V)$

$v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in V$ を考えると.

$$f(v) = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ 4 は f の固有値であり, $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ は固有値 4 の固有ベクトルである.

線形写像 $f : V \to V$ に対して, どうすれば固有値と固有ベクトルを求めることができるか.

Def (固有空間)

ベクトル空間 V と 線形写像 $f: V \to V$ の固有値 λ に対して

$$W(\lambda) := \{ v \in V \mid f(v) = \lambda v \}$$

を 固有値 λ の 固有空間という.

[演 $0 \in W(\lambda)$ を示せ]

$$W(\lambda) := \{ v \in V \mid (\lambda \cdot id - f)(v) = 0 \}$$

恒等写像

$id(x) = x$

$$= \mathrm{Ker}(\lambda \cdot id - f)$$

とかき直せて, このことから $W(\lambda)$ は V の部分ベクトル空間であることが分かる.

Def (特性多項式)

線形写像 $f(x) := Ax$ $(x \in V)$ について.

変数 t に関して

$$\phi_A(t) := \det(tE - A)$$

単位行列

と定めると $\phi_A(t)$ は n 次の多項式であり, これを A の特性多項式という.

Prop λ は A の固有値である

$\iff \phi_A(\lambda) = 0$

$(\Rightarrow)$ 演

$(\Leftarrow)$ 方程式 $Ax = \lambda x$ を考える.

$$\lambda x - Ax = \mathbb{0}$$

$$(\lambda E - A)x = \mathbb{0} \quad \text{—}(*)$$

ここで $\phi_A(\lambda) = \det(\lambda E - A) = 0$

より $\lambda E - A$ は正則行列でない.

(逆行列をもたない).

ゆえに $(*)$ は $\mathbb{0}$ でない解 $x = v$

が存在する.

//

Ex (1) $A = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ とする.

$$\phi_A(t) = \det(tE - A)$$

$$= \begin{vmatrix} t-7 & 6 \\ -3 & t+2 \end{vmatrix}$$

$$= (t-7)(t+2) - (-3)\cdot 6$$

$$= t^2 - 5t + 4$$

$$= (t-1)(t-4)$$

$\therefore$ 1, 4 は A の固有値

(2) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とする

$$\phi_A(t) = \begin{vmatrix} t & 1 \\ -1 & t \end{vmatrix} = t^2 + 1$$

$\pm\sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$ なので 固有値なし

演 $A=\begin{pmatrix} 8 & -10 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$ とする

(1) Aの特性多項式 $\phi_A(t)$ を求めよ

(2) Aの固有値を求めよ.

(3). Aの各固有値の固有空間 $W(\lambda)$ を求め, その次元を求めよ.

$W(\lambda)=\mathrm{Span}(v_1, \dots)$ の形で答えよ という いみ.