線形代数 2 定期試験 対策問題集（略解つき）

ver. 2024.01.27
担当: 山口航平
kohei.yamaguchi.28 [at] gmail.com
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~d20003j/lin_alg2.html

問 1. 線形写像

$$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3;\quad \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}2x_1+x_2-x_3\\x_2-x_3\\x_1-x_3\end{pmatrix}$$

について.

(1) 任意の $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}$ について $f(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$ を満たす行列 A を求めよ.

(2) $\mathrm{Im}(f)$ と $\mathrm{Ker}(f)$ の基底を 1 組それぞれ与えよ.

略解 1. (1) $A=\begin{pmatrix}2&1&-1\\0&1&-1\\1&0&-1\end{pmatrix}$.

(2) $\mathrm{Ker}(f)=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3\mid A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\}=\{\boldsymbol{0}\}$ ゆえに $\mathrm{Ker}(f)$ の基底はない.

$\mathrm{Im}(f)=\mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}\right)$ であり, $\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ は一次独立であるので, $\left\{\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}\right\}$ は $\mathrm{Im}(f)$ の基底である.

問 2. $V:=\mathbb{R}^3, W:=\mathbb{R}^2$ とし, 線形写像

$$f:V\to W,\quad \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}x_1-x_2\\x_1-x_3\end{pmatrix}$$

が与えられているとする. 以下の問いに答えよ.

(1) f の基底

$$(\boldsymbol{a}):=\left(\boldsymbol{a}_1:=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_2:=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_3:=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right),(\boldsymbol{b}):=\left(\boldsymbol{b}_1:=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{b}_2:=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}\right)$$

に関する表現行列 A を求めよ.

(2) V に対して, 別の基底

$$(\boldsymbol{a}'):=\left(\boldsymbol{a}'_1:=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{a}'_2:=\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{a}'_3:=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

を与える. このとき基底変換 : $(\boldsymbol{a})\to(\boldsymbol{a}')$ の行列 B を求めよ.

(3) W に対して, 別の基底

$$(\boldsymbol{b}'):=\left(\boldsymbol{b}'_1:=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{b}'_2:=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right)$$

を与える．このとき基底変換 : $(\boldsymbol{b}) \to (\boldsymbol{b}')$ の行列 C を求めよ．

(4) f の基底 $(\boldsymbol{a}'), (\boldsymbol{b}')$ に関する表現行列 A' を求めよ．

略解 2. (1) $f(\boldsymbol{a}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\boldsymbol{b}_2$, $f(\boldsymbol{a}_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{b}_1 + 2\boldsymbol{b}_2$, $f(\boldsymbol{a}_3) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = 2\boldsymbol{b}_1 + 3\boldsymbol{b}_2$ であるから，

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} f(\boldsymbol{a}_1) & f(\boldsymbol{a}_2) & f(\boldsymbol{a}_3) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{b}_1 + 2\boldsymbol{b}_2 & 2\boldsymbol{b}_1 + 3\boldsymbol{b}_2 \end{pmatrix} \\ &= (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

したがって，$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

(2) $\boldsymbol{a}'_1 = -2\boldsymbol{a}_1 - 3\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}'_2 = -\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}'_3 = \boldsymbol{a}_1$ であるから，

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}'_1 & \boldsymbol{a}'_2 & \boldsymbol{a}'_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -2\boldsymbol{a}_1 - 3\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 & -1\boldsymbol{a}_1 - 1\boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_1 \end{pmatrix} \\ &= (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

したがって，$B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(3) $\boldsymbol{b}'_1 = -\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{b}'_2 = -\boldsymbol{b}_1$, であるから，

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \boldsymbol{b}'_1 & \boldsymbol{b}'_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2 & -\boldsymbol{b}_1 \end{pmatrix} \\ &= (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2) \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

したがって，$C = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

(4) $A' = C^{-1}AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

問 3. 次の行列は対角化可能か否かを判定せよ．また対角化可能な場合は対角化せよ．

(1) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

(2) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

(3) $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

略解 3. (1) A の特性多項式 $\Phi_A(t)$ は次のようになる．

$$\begin{aligned}\Phi_A(t) &= \det(tE - A) \\ &= \begin{vmatrix} t-3 & -1 \\ -1 & t-3 \end{vmatrix}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= t^2 - 6t + 8 \\
&= (t-4)(t-2).
\end{aligned}
$$

したがって A の固有値は $2, 4$ である．また，それぞれの固有空間 $W(2), W(4)$ は次のようになる．

$$
W(2) = \mathrm{Span}(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}), \quad W(4) = \mathrm{Span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})
$$

ゆえに $\dim(W(2)) + \dim(W(4)) = 1 + 1 = 2$ となり，A は対角化可能である．$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とすると $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ となる．

(2) B の特性多項式 $\Phi_B(t)$ は次のようになる．

$$
\begin{aligned}
\Phi_B(t) &= \det(tE - B) \\
&= \begin{vmatrix} t-1 & -1 \\ -2 & t-2 \end{vmatrix} \\
&= t^2 - 3t \\
&= t(t-3).
\end{aligned}
$$

したがって B の固有値は $0, 3$ である．また，それぞれの固有空間 $W(0), W(3)$ は次のようになる．

$$
W(0) = \mathrm{Span}(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}), \quad W(3) = \mathrm{Span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix})
$$

ゆえに $\dim(W(0)) + \dim(W(3)) = 1 + 1 = 2$ となり，B は対角化可能である．$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ とすると $P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ となる．

(3) C の特性多項式 $\Phi_C(t)$ は次のようになる．

$$
\begin{aligned}
\Phi_C(t) &= \det(tE - C) \\
&= \begin{vmatrix} t-1 & -1 \\ 0 & t-1 \end{vmatrix} \\
&= t^2 - 2t + 1 \\
&= (t-1)^2.
\end{aligned}
$$

したがって C の固有値は 1 である．また，固有空間 $W(1)$ は次のようになる．

$$
W(1) = \mathrm{Span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix})
$$

ゆえに $\dim(W(1)) = 1 < 2$ となり，C は対角化不可能である．

問 4 (予告問題)**.** n 次正方行列 A の相異なる固有値を $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ とする．このとき次の不等式

$$
\sum_{k=1}^{r} \dim W(\lambda_k) \leq n
$$

が成り立つことを示せ．