線形代数 2 定期試験 略解

ver. 2024.01.27
担当: 山口航平
kohei.yamaguchi.28 [at] gmail.com
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~d20003j/lin_alg2.html

問 1 (各 15 点)**.** $V := \mathbb{R}^3, W := \mathbb{R}^2$ とし, 線形写像

$$f : V \to W, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_3 \end{pmatrix}$$

が与えられているとする. 以下の問いに答えよ.

(1) f の基底

$$(\boldsymbol{a}) := \left(\boldsymbol{a}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right), (\boldsymbol{b}) := \left(\boldsymbol{b}_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_2 := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

に関する表現行列 A を求めよ.

(2) V に対して, 別の基底

$$(\boldsymbol{a}') := \left(\boldsymbol{a}'_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}'_2 := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}'_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

を与える. このとき基底変換 : $(\boldsymbol{a}) \to (\boldsymbol{a}')$ の行列 B を求めよ.

(3) W に対して, 別の基底

$$(\boldsymbol{b}') := \left(\boldsymbol{b}'_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}'_2 := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

を与える. このとき基底変換 : $(\boldsymbol{b}) \to (\boldsymbol{b}')$ の行列 C を求めよ.

(4) f の基底 $(\boldsymbol{a}'), (\boldsymbol{b}')$ に関する表現行列 A' を求めよ.

略解 1. (1) $f(\boldsymbol{a}_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{b}_1 - 2\boldsymbol{b}_2$, $f(\boldsymbol{a}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{b}_1$, $f(\boldsymbol{a}_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\boldsymbol{b}_2$ であるから,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} f(\boldsymbol{a}_1) & f(\boldsymbol{a}_2) & f(\boldsymbol{a}_3) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 - 2\boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{b}_1 & -\boldsymbol{b}_2 \end{pmatrix} \\ &= (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

したがって, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(2) $\boldsymbol{a}'_1 = \boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}'_2 = -\boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}'_3 = \boldsymbol{a}_1 - 3\boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_3$ であるから,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}'_1 & \boldsymbol{a}'_2 & \boldsymbol{a}'_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_3 & -\boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{a}_1 - 3\boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_3 \end{pmatrix} \\ &= (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

したがって, $B=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&-1&-3\\1&-1&-1\end{pmatrix}$.

(3) $\boldsymbol{b}'_1=-\boldsymbol{b}_1-\boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{b}'_2=\boldsymbol{b}_2$, であるから,

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\boldsymbol{b}'_1 & \boldsymbol{b}'_2\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}-\boldsymbol{b}_1-\boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{b}_2\end{pmatrix}\\ &= (\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2)\begin{pmatrix}-1&0\\-1&1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

したがって, $C=\begin{pmatrix}-1&0\\-1&1\end{pmatrix}$.

(4) $A'=C^{-1}AB=\begin{pmatrix}-1&0\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\-2&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&-1&-3\\1&-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&2\\-1&2&1\end{pmatrix}$.

問 2 (各 10 点)**.** 次の行列は対角化可能か否かを判定せよ. また対角化可能な場合は対角化せよ.

(1) $A=\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}$

(2) $B=\begin{pmatrix}0&1\\0&2\end{pmatrix}$

(3) $C=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$

略解 2. (1) A の特性多項式 $\Phi_A(t)$ は次のようになる.

$$\begin{aligned}\Phi_A(t) &= \det(tE-A)\\ &= \begin{vmatrix}t-2 & -1\\ 0 & t-2\end{vmatrix}\\ &= t^2-4t+4\\ &= (t-2)^2.\end{aligned}$$

したがって A の固有値は 2 である. また, 固有空間 $W(2)$ は次のようになる.

$$W(2)=\mathrm{Span}(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix})$$

ゆえに $\dim(W(2))=1<2$ となり, A は対角化不可能である.

(2) B の特性多項式 $\Phi_B(t)$ は次のようになる.

$$\begin{aligned}\Phi_B(t) &= \det(tE-B)\\ &= \begin{vmatrix}t & -1\\ 0 & t-2\end{vmatrix}\\ &= t^2-2t\\ &= t(t-2).\end{aligned}$$

したがって B の固有値は $0,2$ である. また, それぞれの固有空間 $W(0),W(2)$ は次のようになる.

$$W(0)=\mathrm{Span}(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}),\quad W(2)=\mathrm{Span}(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix})$$

ゆえに $\dim(W(0)) + \dim(W(2)) = 1 + 1 = 2$ となり，B は対角化可能である．$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ とすると $P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ となる．

(3) C の特性多項式 $\Phi_C(t)$ は次のようになる．

$$\begin{aligned} \Phi_C(t) &= \det(tE - C) \\ &= \begin{vmatrix} t & 0 \\ -1 & t \end{vmatrix} \\ &= t^2. \end{aligned}$$

したがって C の固有値は 0 である．また，固有空間 $W(0)$ は次のようになる．

$$W(0) = \mathrm{Span}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix})$$

ゆえに $\dim(W(0)) = 1 < 2$ となり，C は対角化不可能である．

問 3 (10 点)**.** n 次正方行列 A の相異なる固有値を $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ とする．このとき次の不等式

$$\sum_{k=1}^{r} \dim W(\lambda_k) \leq n$$

が成り立つことを示せ．

略解 3. $\dim(W(\lambda_k)) = n_k$ $(k = 1, \ldots, r)$ とおく．また，各固有空間 $W(\lambda_k) \subset \mathbb{R}^n$ の 1 組の基底

$$\Sigma_k := \{\boldsymbol{v}_{k,1}, \boldsymbol{v}_{k,2}, \ldots, \boldsymbol{v}_{k,n_k}\}$$

をとる．ここで $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_r$ の任意の一次関係式

$$\sum_{k=1}^{r} (c_{k,1}\boldsymbol{v}_{k,1} + c_{k,2}\boldsymbol{v}_{k,2} + \cdots + c_{k,n_k}\boldsymbol{v}_{k,n_k}) = \boldsymbol{0}, \quad c_{k,l} \in \mathbb{R}$$

を考える．簡単のため $\boldsymbol{u}_k = c_{k,1}\boldsymbol{v}_{k,1} + c_{k,2}\boldsymbol{v}_{k,2} + \cdots + c_{k,n_k}\boldsymbol{v}_{k,n_k}$ $(1 \leq k \leq r)$ とおくと，上の一次関係式は

$$\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 + \cdots + \boldsymbol{u}_r = \boldsymbol{0}$$

と書き直せる．$A\boldsymbol{u}_k = \lambda_k \boldsymbol{u}_k$ $(1 \leq k \leq r)$ であるから，上の一次関係式の両辺に左から A をかけると

$$\begin{aligned} A(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 + \cdots + \boldsymbol{u}_r) &= A\boldsymbol{0} \\ \lambda_1\boldsymbol{u}_1 + \lambda_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + \lambda_r\boldsymbol{u}_r &= \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

となり，さらにこの両辺に A を次々にかけていくと

$$\begin{aligned} \lambda_1^2\boldsymbol{u}_1 + \lambda_2^2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + \lambda_r^2\boldsymbol{u}_r &= \boldsymbol{0} \\ &\cdots\cdot \\ \lambda_1^{r-1}\boldsymbol{u}_1 + \lambda_2^{r-1}\boldsymbol{u}_2 + \cdots + \lambda_r^{r-1}\boldsymbol{u}_r &= \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

を得る．これらを行列を用いて書き直すと以下のようになる．

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \cdots & \boldsymbol{u}_r \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{r-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{r-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_r & \lambda_r^2 & \cdots & \lambda_r^{r-1} \end{pmatrix}.$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ が相異なることに注意すると $\det(P) \neq 0$ であることが確認でき，P は正則行列であることが分かる．ここで上の等式の両辺に右から P^{-1} をかけることで $\boldsymbol{u_k} = c_{k,1}\boldsymbol{v}_{k,1} + c_{k,2}\boldsymbol{v}_{k,2} + \cdots + c_{k,n_k}\boldsymbol{v}_{k,n_k} = \boldsymbol{0}$ $(1 \leq k \leq r)$ を得る．Σ_k は一次独立だから $c_{k,l} = 0$ となり，$\sum_{k=1}^{r} n_k$ 個のベクトル $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_r$ は一次独立であることが分かる．$\mathbb{R}^n$ に含まれるベクトルの集合の一次独立な最大個数は高々 n 個であるから $\sum_{k=1}^{r} n_k \leq n$ である．