2023/05/25

前回の復習

$n \in \mathbb{N}$ と $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} := \{0\} \cup \mathbb{N} = \{0,1,2,\cdots\}$
（非負整数）

に対して

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} = \left(\begin{array}{l}n\text{コの区別できるモノから}\\ k\text{コをえらぶ方法の数}\end{array}\right).$$

Th'm 1 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \qquad (k=1,2,\cdots,n)$$

が成り立つ.

Th'm 2（二項定理）
$n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n .$$

証明は n に関する帰納法 & Th'm 1 を使う.（各自で考えよ）.

《行列と線形写像》

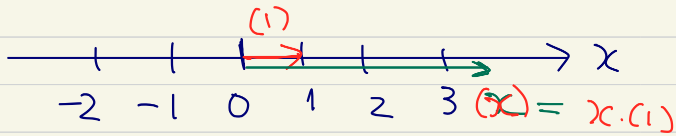
・$n\in\mathbb{N}$ に対して $\mathbb{R}^n := \left\{ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \;\middle|\; x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$

で n次元実ベクトル空間を表す。

復習 (比例写像)

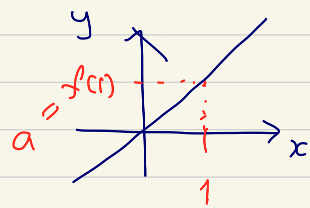
(数直線)

$\mathbb{R} \longleftrightarrow$



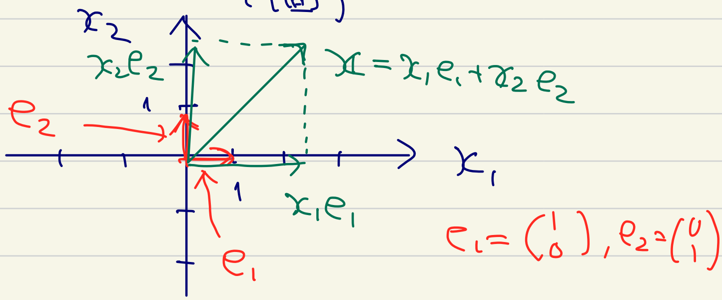
写像 $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ を $f(x) = ax$ $(a\in\mathbb{R})$ とする。

比例定数 $a = f(1)$



(平面)

・$\mathbb{R}^2 \longleftrightarrow$



写像 $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ を $f\left(\underset{\substack{\parallel \\ \boldsymbol{x}}}{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}\right) = \underset{\substack{\cap \\ \mathbb{R}^2}}{\begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}}$

とする.

- $f(e_1) = f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $f(e_2) = f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

各 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = (f(e_1), f(e_2)) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{A:=} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

行列のかけ算

$$= \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ [比例写像の2次元版]

$$A = (f(e_1), f(e_2))$$

$f:\mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ は線形写像 $\Longleftrightarrow$ $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$

$$A = n\overset{m}{\begin{pmatrix} * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & * \end{pmatrix}}$$ とかける.