2023年05月18日

数列 $\{a_n\}$ に対して、和 $a_1 + \cdots + a_n$ を

$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i$ とかく.

$S \longleftrightarrow \Sigma$ （和 $\longleftrightarrow$ Summation）

sigma

ex. • $1+2+\cdots+n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} i$

• $2+5+8+\cdots+\underset{\uparrow\ n\text{項目}}{3n-1} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(3i-1)$

Th'm　すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

が成り立つ. ㊉

pf.　数学的帰納法により示す.

[I]　$n=1$ のとき　$\dfrac{1\cdot 2}{2} = 1$　ok.

[II]　$n=k$ のとき　㊉ が成り立つと仮定する

$$\left(\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2} \right)$$

$n = k+1$ とする　$\left(\sum_{i=1}^{k+1} i = \frac{(k+1)(k+2)}{2} \text{ を示す} \right)$

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = (k+1) + \sum_{i=1}^{k} i$$

$$\underset{\text{仮定}}{=} (k+1) + \frac{k(k+1)}{2}$$

$$= \frac{2(k+1) + k(k+1)}{2}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

[I] [II] より ⊛ はすべての $n \in \mathbb{N}$ で成り立つ.

Th'm　すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

が成り立つ

pf.　$f(n) = n^3$　$(n \in \mathbb{N})$ とする.

$$\left[\begin{aligned} f(n) - f(n-1) &= n^3 - (n-1)^3 \\ &= 3n^2 - 3n + 1 \end{aligned} \right]$$

$$\begin{aligned}
f(n) - \cancel{f(n-1)} &= 3n^2 - 3n + 1 \\
\cancel{f(n-1)} - \cancel{f(n-2)} &= 3(n-1)^2 - 3(n-1) + 1 \\
&\vdots \\
+)\quad \cancel{f(1)} - f(0) &= 3 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 1
\end{aligned}$$

$$f(n) - f(0) = 3(\underbrace{1^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2}_{=S}) - 3(1 + \cdots + (n-1) + n) + n$$

$$n^3 = 3S - 3 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n$$

$$3S = n^3 + \frac{3}{2} n(n+1) - n$$

$$3S = \frac{1}{2}\left(n^3 + 3n(n+1) - n\right)$$

$$3S = \frac{1}{2}\left(n^3 + 3n^2 + 2n\right)$$

$$S = \frac{1}{6} n(n^2 + 3n + 2)$$

$$\therefore S = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

$\boxed{}$

(演) 上のThmを数学的帰納法により示せ.

(1) 二項係数と二項定理.

nコのモノ から kコのモノ をえらぶ方法の数
(区別可)

$$=: \binom{n}{k} = {}_nC_k$$

(中・高まではコレだった)

Thm

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

(証)

Rem　$k=0$ のときも　$0! := 1$ とすれば

$$\frac{n!}{0!\,(n-0)!} = 1$$

$\rightsquigarrow$「nコのモノから 0コのモノを選ぶ方法は 1通り」

Th'm　すべての $n = 0, 1, 2, \cdots$ に対して

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

パスカルの三角形

$$\binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

$$\binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$

$$\binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5}$$

$$1$$

$$1 \quad 1$$

$$1 \quad 2 \quad 1$$

$$1 \quad 3 \quad 3 \quad 1$$

$$1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1$$

pf.

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$= \frac{1}{k!\,(n+1-k)!}\left(k\,n! + (n-k+1)\,n!\right)$$

$$= \frac{(k+n-k+1)\,n!}{k!\,(n+1-k)!} = \frac{(n+1)\,n!}{k!\,(n+1-k)!}$$

$$= \frac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}$$ 証

③ 二項係数の母函数

(有限の) 数列 $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ が与えられたとき
文字 x の多項式

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

を母函数という。

Th'm (二項定理)
nを固定する。数列

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}$$ の母函数は

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i = (1+x)^n$$

Pf. は演習問題。(Hint: 数学的帰納法
& パスカルの三角形)