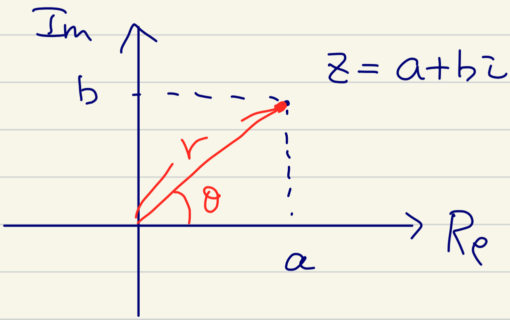
2023年05月11日
(第4回)

前回の復習



$z = a + bi = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

← zの極形式

$r = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$ (絶対値)

$\theta = \arg(z)$ (偏角)

Thm (ド・モアブルの定理)

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

$(n \in \mathbb{Z})$

問 方程式 $z^3 = 1$ を解け。(実数解は $z=1$ のみ)

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ とおく $(r>0,\ 0 \leq \theta < 2\pi)$

$z^3 = 1 \iff r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta) = 1(\cos 0 + i\sin 0)$

ド・モアブル

$$\iff \begin{cases} r^3 = 1 \iff r = 1 \quad \because r \in \mathbb{R} \\ 3\theta = 0 + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

$\iff \theta = \frac{2}{3}k\pi$

$\theta = 0,\ \frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi,\ \cancel{\frac{6}{3}\pi}$ ($\cancel{= 2\pi}$)

$k=0$　$k=1$　$k=2$　$k=3$

$\therefore z = \cos\left(\frac{2}{3}k\pi\right) + i\sin\left(\frac{2}{3}k\pi\right)$

$k = 0, 1, 2.$

演 方程式 $z^5=1$ を解け.

答 1 の n 乗根. (⇔ 方程式 $z^n=1$ の解)

$e(\theta) := \cos\theta + i\sin\theta$ とおく.

$\rightsquigarrow$ ・$e(2k\pi) = 1 \quad (k \in \mathbb{Z})$
・$e(\theta)^n = e(n\theta)$ (ド・モアブルの定理)

ここで $\omega_n := e\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ とおくと,

$$\underbrace{1, \omega_n, \omega_n^2, \cdots, \omega_n^{n-1}}, \underset{1}{\underset{\shortparallel}{\omega_n^n}}, \underset{\omega_n}{\underset{\shortparallel}{\omega_n^{n+1}}}, \cdots$$

これらは $z^n=1$ の解である.

$$\omega_n^k = e\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \quad (k=0,1,\cdots,n-1)$$

$$\rightsquigarrow \left(\omega_n^k\right)^n = e\left(\frac{2k\pi}{\cancel{n}}\cdot\cancel{n}\right) = e(2k\pi) = 1$$

答

Thm（代数学の基本定理, Gauss）

すべての $\mathbb{C}$-多項式 $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$
$(a_0,\cdots,a_n\in\mathbb{C},\ a_n\neq 0)$
は1次式の積

$$f(x)=a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$$ に分解する
$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\in\mathbb{C})$ ▨

《数列と和の公式》

Def. 順序付けられた数の列
$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ を数列といい $\{a_n\}$ で表す

初項 ▨

例 等差数列

$$a_1 \xrightarrow{+d} a_2 \xrightarrow{+d} a_3, \cdots, a_{n-1} \xrightarrow{+d} a_n, \cdots$$

一般項：$a_n=a_1+(n-1)d \quad (n=1,2,\cdots)$

公差

漸化式：$a_{n+1}=a_n+d$

Ex. $\underset{a_1}{\underset{\shortparallel}{5}},\ \underset{a_2}{\underset{\shortparallel}{8}},\ \underset{a_3}{\underset{\shortparallel}{11}},\ \underset{a_4}{\underset{\shortparallel}{14}},\ \cdots,\ \underset{n\text{番目}}{?} = a_n$

$a_n = a_1 + (n-1)3 \rightsquigarrow a_n = 3n+2$

② 等比数列

$$a_1, \underbrace{\ }_{\times r} a_2, \underbrace{\ }_{\times r} a_3, \cdots, a_{n-1}, \underbrace{\ }_{\times r} a_n, \cdots$$

一般項：$a_n = a_1 r^{n-1}$ 公比 $(n=1,2,\cdots)$

漸化式：$a_n = r\, a_{n-1}$

Ex. $3, 6, 12, 24, \cdots, ?$

$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_n$

$a_n = 3\cdot 2^{n-1}$ 図

Def.（総和の記号 Σ シグマ）

数列 $\{a_n\}$ の初項 a_1 から第n項 a_n までの総和 $a_1+\cdots+a_n$ を

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_i}\ := a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

という記号で表す 図

Ex. ・ $5+8+11+14 = \sum_{i=1}^{4} 3i+2$

・ $3+6+12+24 = \sum_{i=1}^{4} 3\cdot 2^{i-1}$

Rem

- $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$
- $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} c\cdot a_i = c\sum_{i=1}^{n} a_i$ が成り立つ

⑪ 数列の総和.

$1+2+3+\cdots+100 = ?$

答え

$$\begin{array}{rl} 1+2+3+\cdots+100 &= S \\ +)\ 100+99+98+\cdots+1 &= S \\ \hline \underbrace{101+101+101+\cdots+101}_{100つ} &= 2S \end{array}$$

$101\times 100 = 2S \quad \therefore\ S = \dfrac{100\cdot 101}{2} = 5050$ 答

$1+2+\cdots+n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ が成り立つ.

∵

$$\begin{array}{rl} 1+2+\cdots+n &= S \\ +)\ n+(n-1)+\cdots+1 &= S \\ \hline \underbrace{(n+1)+(n+1)+\cdots+(n+1)}_{nつ} &= 2S \end{array}$$

$\therefore\ S = \dfrac{n(n+1)}{2}$