2023年4月27日
(第3回)

《複素数と代数方程式》

◎ 複素平面 (Gauss平面)

一次方程式　$ax+b=0$　$(a\neq 0)$

$$x=-b/a$$

二次方程式　$ax^2+bx+c=0$　$(a\neq 0)$

$$b^2-4ac\geqq 0 \rightsquigarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\in\mathbb{R}$$

二次方程式は $b^2-4ac\geqq 0$ という条件を満たすものでないと実数の世界では解けない。

Ex.　$x^2+1=0$　$\leftarrow$ この方程式の解は実数じゃないけど、"i"をその解として新たに数として認めよう。

$$i^2+1=0 \quad (i^2=-1)$$

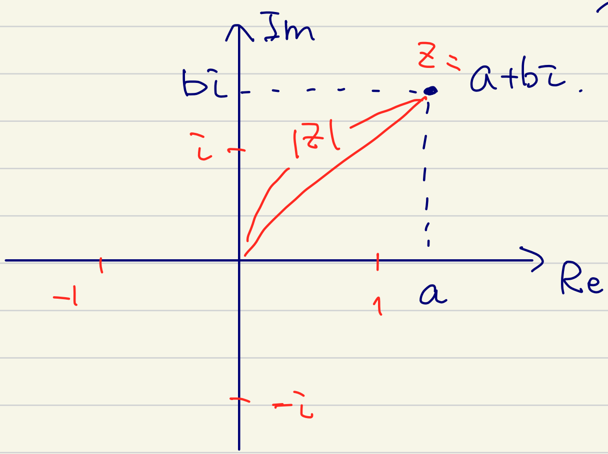
iを虚数単位とよぶ。

<u>Def.</u>　実数のペア (a,b) に対して数 $a+bi$ を複素数という。
また aを実部，bを虚部という。

$$\mathbb{C}:=\{a+bi \mid a,b\in\mathbb{R}\}\text{：複素数全体}$$

$\mathbb{C}$ は (xy) 平面と同一視できる.

⤳ 複素平面!



<u>Def.</u> (絶対値)

$z = a+bi \quad (a, b \in \mathbb{R})$ に対して

$|z| := \sqrt{a^2+b^2} \in \mathbb{R}$ と定義し, z の絶対値

という.

<u>Ex.</u>

$$|2+i| = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$$

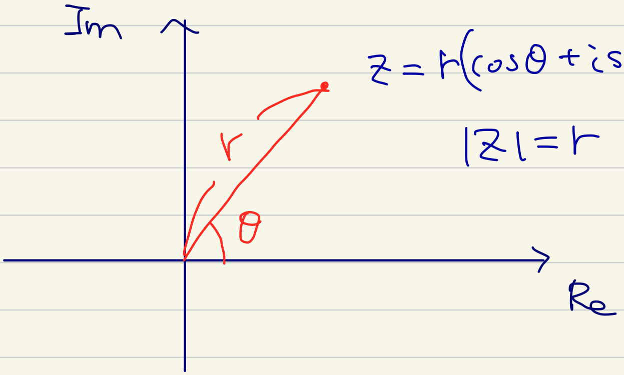
$$|3i| = \sqrt{0^2+3^2} = \sqrt{3^2} = 3 \, .$$

$$(a \in \mathbb{R}) \quad |a| = \sqrt{a^2} = \begin{cases} a & a \geqq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$

$$= |a|$$

実数のときの絶対値.

ド・モアブルの定理



$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

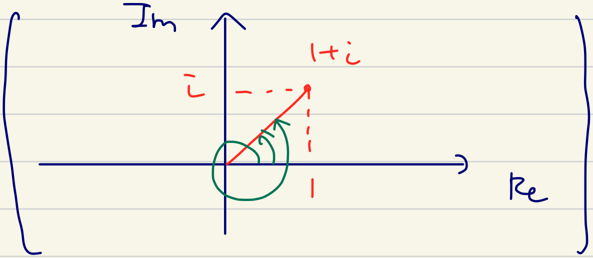
$|z| = r$

argument.

θ を z の偏角といい $\arg(z)$ とかく.

Rem $z \in \mathbb{C}$ に対して $\arg(z)$ は 1つに決まらない

ex. $z = 1+i$ $\quad \arg(z) = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

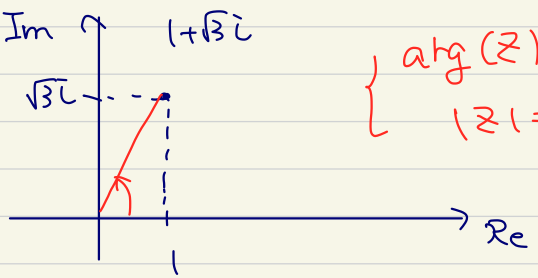


Def (極形式)

偏角 絶対値

$z \in \mathbb{C}$ の $\theta := \arg(z)$, $r := |z|$ を用いた表示 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ を z の極形式という.

Ex. ① $z = 1 + \sqrt{3}i$ の極形式を求めよ.



$$\begin{cases} \arg(z) = \frac{\pi}{3} \\ |z| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2 \end{cases}$$

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

答

② $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ の極形式を求めよ 演

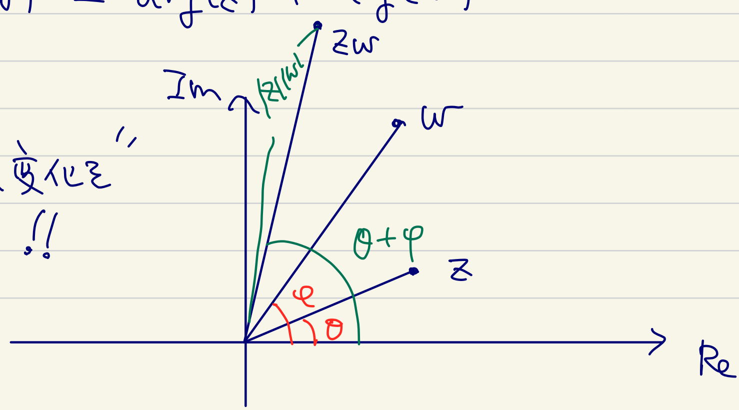
$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, $w = s(\cos\varphi + i\sin\varphi) \in \mathbb{C}$
$(r, s > 0, \quad 0 \leq \theta, \varphi < 2\pi)$ とおく。
このとき zw の極形式を考えよ。

$$\rightsquigarrow zw = rs(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$
$$= rs\left((\cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi) + i(\sin\theta\cos\varphi - \cos\theta\sin\varphi)\right)$$
$$= rs\left(\cos(\theta+\varphi) + i\sin(\theta+\varphi)\right)$$ 答

つまり ・ $|zw| = |z||w|$
・ $\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w)$ ということ！

図形的には

"$\mathbb{C}$ のかけ算は長さの変化を伴う回転移動 !!"



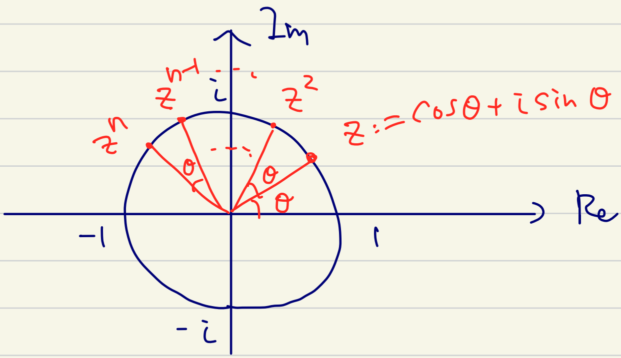
ド・モアブル

Th'm (de Moivre's theorem)

$\theta \in \mathbb{R}$ とする．このとき

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

が成り立つ． $\blacksquare$



Ex. 方程式 $z^3 = 1$ を解け．

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ とおく $\quad (r > 0,\ 0 \le \theta < 2\pi)$

$z^3 = 1 \iff r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta) = 1(\cos 0 + i\sin 0)$

ド・モアブル

$$\iff \begin{cases} r^3 = 1 \iff r = 1 \quad (\because\ r \in \mathbb{R}) \\ 3\theta = 0 + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\iff \theta = \frac{2}{3}k\pi$$

$\therefore z = \cos\left(\frac{2}{3}k\pi\right) + i\sin\left(\frac{2}{3}k\pi\right)$

$k = 0, 1, 2.$

$\theta = 0,\ \frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi,\ \cancel{\frac{6}{3}\pi \ (= 2\pi)}$

$k=0$ $\quad k=1$ $\quad k=2$ $\quad k=3$