2023.07.19

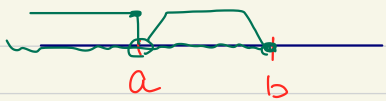
定理1

X：確率変数とする．$F(x)$ を X の分布関数とする．
区間 $a<x\leqq b$ に対して
$$P(a<X\leqq b) = F(b) - F(a)$$ が成り立つ．

∵ $F(b) = P(X\leqq b) = P(X\leqq a$ または $a<X\leqq b)$

定義

$$= P(X\leqq a) + P(a<X\leqq b)$$



$$= F(a) + P(a<X\leqq b)$$

//

定理2

$X = x_1, x_2, \cdots\cdots$ （離散型）

$p_i := P(X=x_i)$ ： $X=x_i$ となる確率．

$\rightsquigarrow$ $P(a<X\leqq b) = \displaystyle\sum_{a<x_i\leqq b} p_i$ が成り立つ．

<u>例1</u> サイコロ投げ $X=1, 2, 3, 4, 5, 6$

$$P(2.5<X\leqq 7) = P(X=3, 4, 5, 6)$$
$$= P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) + P(X=6)$$
$$= p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = \frac{1}{6} \times 4 = \frac{2}{3}$$

//

系　$\displaystyle\sum_{i\geqq 1} p_i = 1$　（すべての確率の和）

例　偏りのないコインを投げる。
X =（最初にHが出るまでに投げた回数）
とする。

$p_1 := P(X=1) = P(H) = \frac{1}{2}$

↑ 1回目でHがでる確率

$p_2 := P(X=2) = P(TH) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$p_3 := P(X=3) = P(TTH) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

⋮

$p_n := P(X=n) = P(\underbrace{TT\cdots T}_{n-1}H) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$\sum_{n\geqq 1} p_n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k}_{部分和}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{2}}$$

$\left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$$ //

③ 連続型確率変数

測定を行う実験で現れる

X：連続型とする．

(密度)

関数 $f(x) := P(X=x)$ を X の確率関数という．

x という値を測定する確率．

また関数 $F(x) := P(X \leqq x) = \int_{-\infty}^{x} f(v)\,dv$

x という値以下を測定する確率．

を X の分布関数という．

注意

$F'(x) = f(x)$ という関係が成り立つ //

定理3

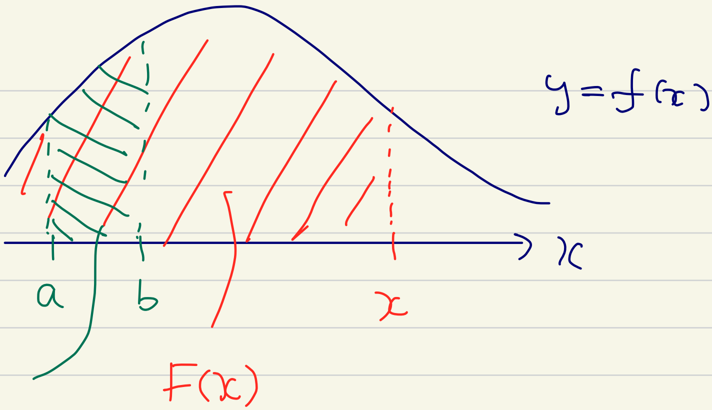
$$P(a < X \leqq b) = F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} f(v)\,dv$$

定理1．

微分積分学の基本定理

$$\left\{\begin{array}{ll} \leqq & < \\ \leqq & \leqq \\ < & < \end{array}\right.$$

どれでも成り立つ．



$P(a \leqq X \leqq b)$

例　X の確率関数は $f(x)=\begin{cases} 0.75(1-x^2) & (-1 \leqq x \leqq 1) \\ 0 & (その他) \end{cases}$

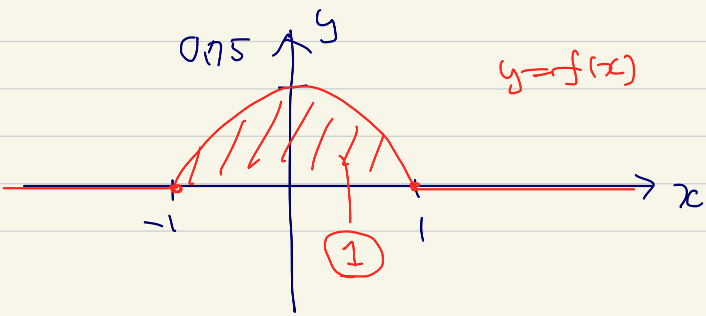
で与えられているとする。

(1) 分布関数を求めよ

(2) $P(-\frac{1}{2} \leqq X \leqq \frac{1}{2})$ を求めよ。

答 (1)

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(v)\,dv$$



$-1 < x \leqq 1$ のとき

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(v)\,dv$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{-1} f(v)\,dv} + \int_{-1}^{x} f(v)\,dv$$

$$= \int_{-\infty}^{-1} 0\,dv + \int_{-1}^{x} 0.75(1-v^2)\,dv$$

$$= 0 + \left[0.75v - 0.25v^3\right]_{-1}^{x}$$

$$= 0.75x - 0.25x^3 - (-0.75 + 0.25)$$

$$= -0.25x^3 + 0.75x + 0.5$$

$$F(1) = -0.25 + 0.75 + 0.5 = 1$$

$$\therefore F(x) = \begin{cases} 0 & (x \leqq -1) \\ -0.25x^3 + 0.75x + 0.5 & (-1 < x \leqq 1) \\ 1 & (1 > x) \end{cases}$$

//

(2) $P(-\frac{1}{2} \leqq X \leqq \frac{1}{2}) = F(\frac{1}{2}) - F(-\frac{1}{2})$

$$= -0.25 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 0.75 \cdot \frac{1}{2} + 0.5$$

$$- \left(0.25 \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 0.75 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 0.5\right)$$

$$= 68.75\,\%$$