2023.07.13

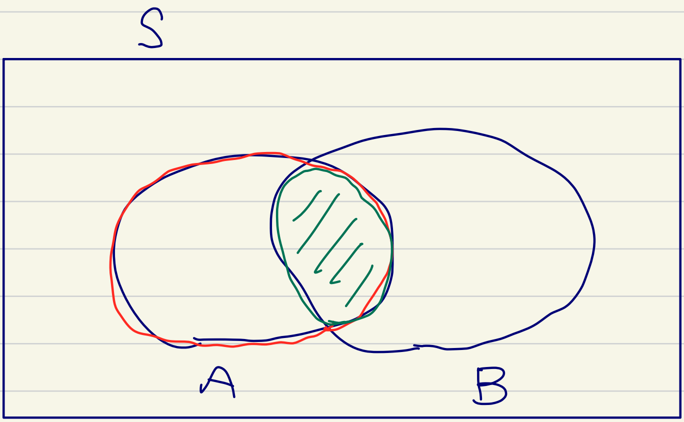
条件つき確率

定義(条件つき確率)

事象Aが起こったという条件のもとで事象Bが起こる確率を「Aを与えたときのBの条件つき確率」といい $P(B|A)$ とかく.

$$P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

標本空間をAとしたときの事象 $A\cap B$ の確率



定理4.

A, B が標本空間 S の事象で $P(A)\neq 0$, $P(B)\neq 0$ であるならば

$$P(A\cap B) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$$

が成り立つ. ▨

☺ $P(B|A) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$, $P(A|B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$

より明らか. ▨

例 ネジの製造　$A = \{$ネジが細すぎる$\}$
$B = \{$ネジが短すぎる$\}$

$P(A) = 0.1$, $P(B|A) = 0.2$　細すぎるネジが短すぎる確率

製造されたロットからランダムに取り出されたネジが細すぎかつ短すぎである確率はいくらか.

$P(A \cap B)$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = 0.1 \times 0.2 = 0.02$$
$$= 2\%.$$

定理4.

独立な事象

事象 A, B が $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ を満たすならば それらは独立な事象という

補足

$P(A) \neq 0$, $P(B) \neq 0$ とする.

$$\begin{cases} P(A \cap B) = P(A)P(B|A) \\ P(A \cap B) = P(A)P(B) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \cancel{P(A)}P(B|A) = \cancel{P(A)}P(B) \Leftrightarrow P(B|A) = P(B)$$

Bの確率はAが起こったか否かには依存しないということ

確率変数

ある実験において観測する量を X とかき
確率変数という。

例

X = サイコロの出目
X = 道路上の車の台数
X = ガンによる死者数
→ 離散型（数え上げ可）

X = 電圧
X = 降水量
X = 鋼鉄の硬度
→ 連続型

分布関数

確率変数 X に対して x の関数
$F(x) := P(X \leqq x)$ を分布関数という。

X が x を超えない任意の値をとる確率

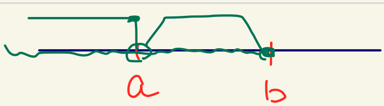
定理5. 区間 $a < x \leqq b$ に対応する確率について

$$P(a < X \leqq b) = F(b) - F(a) \text{ が成り立つ}$$

(証)

$\because$ $F(b) = P(X \leqq b) = P(X \leqq a \text{ または } a < X \leqq b)$
定義

$$= P(X \leqq a) + P(a < X \leqq b)$$



$$= F(a) + P(a < X \leqq b)$$

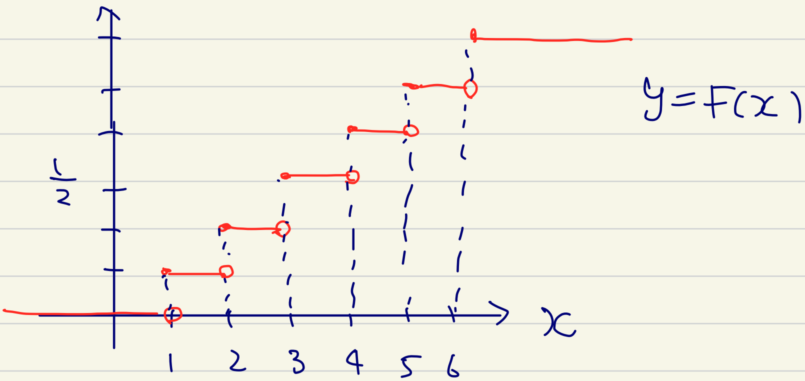
//

<u>例</u>　$X =$ (偏りのないサイコロを投げたときに出る目)

離散型

$$F(1) = P(X \leqq 1) = P(1) = 1/6$$
$$F(2) = P(X \leqq 2) = P(1) + P(2) = 1/6 + 1/6 = \frac{2}{6}$$

$$F(-1) = P(X \leqq -1) = 0$$
$$F(7) = P(X \leqq 7) = P(1) + \cdots + P(6) = \frac{6}{6} = 1$$



② 確率関数 (離散型)

$X = x_1, x_2, \cdots\cdots$ (数え上げ可)

とり得る値

$P(X = x_i) =: p_i$ とかく

$$f(x) := \begin{cases} p_i & (x = x_i \ ; \ i = 1, 2, \cdots) \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

を X の確率関数という。

例. X =（偏りのないサイコロを投げたときに出る目）

$$X = \underset{x_1}{1}, \underset{x_2}{2}, \underset{x_3}{3}, \underset{x_4}{4}, \underset{x_5}{5}, \underset{x_6}{6}$$

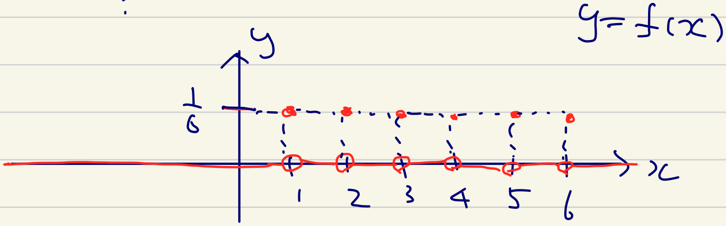
$$f(x_i) = \frac{1}{6} \qquad (i = 1, 2, \cdots, 6)$$

$$f(7) = 0$$

$$f(2.5) = 0$$

$$f(-1) = 0$$

$$\vdots$$



次回は2項分布，ポアソン分布を扱う予定．