2023.07.06

▨ 確率の基本定理

定理1.（余事象の法則）

標本空間 S の事象 A および、その余事象 A^c に対して
$$P(A^c) = 1 - P(A)$$
が成り立つ。 //

（証明）

余事象の定義より $S = A \cup A^c$, $A \cap A^c = \phi$ が成り立つ。したがって

$$1 \underset{\text{公理2}}{=} P(S) = P(A \cup A^c) \underset{\text{公理3}}{=} P(A) + P(A^c)$$

排反

$$\therefore \; P(A^c) = 1 - P(A) \qquad ▨$$

例 4枚の硬貨を同時に投げる。このとき表が少なくとも1枚出るという事象 A の確率を求めよ。ただし硬貨には偏りがないとする。

$$S = \{(H,H,H,H), (H,T,H,H), \cdots, (T,T,T,T)\}$$

$$\#S = 2^4 = 16$$

$$A^c = \{(T,T,T,T)\} \subset S$$ （表が1枚も出ない＝全てウラ）

$$P(A^c) = 1 - P(A) \Leftrightarrow P(A) = 1 - P(A^c)$$
$$= 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$ ▨

定理2（互いに排反な場合の加法定理）

標本空間 S の互いに排反な事象 $A_1, A_2, \dots, A_m$ に対し、つぎが成り立つ。

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_m)$$

(証明) m に関する帰納法により示す。

$m=2$ のとき。($A_1, A_2 \subset S$ であって $A_1 \cap A_2 = \phi$)

$$P(A_1 \cup A_2) \underset{\text{公理3}}{=} P(A_1) + P(A_2)$$

$m=k$ のとき $P(A_1 \cup \cdots \cup A_k) = P(A_1) + \cdots + P(A_k)$ が成り立つと仮定する。

事象 $A_{k+1} \subset S$ は各 $A_1, \dots, A_k$ と互いに排反とする。

$A := A_1 \cup \cdots \cup A_k \subset S$ とすると $A_{k+1} \cap A = \phi$ である。

$$P(A \cup A_{k+1}) \underset{\text{公理3}}{=} P(A) + P(A_{k+1})$$

$$\underset{\text{仮定}}{=} P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_k) + P(A_{k+1})$$

したがって $m=k+1$ のときも正しい。 ∎

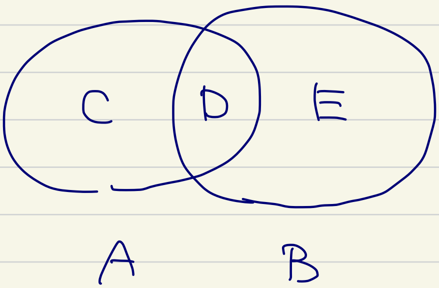
定理3.（任意の事象に対する加法定理）

標本空間 S の事象 A, B に対して，次が成り立つ．

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

//

（証明）



$C := A \cap B^c$
$D := A \cap B$
$E := A^c \cap B$

このとき $C, D, E \subset S$ は互いに排反な事象である

$$P(A \cup B) = P(C \cup D \cup E) = P(C) + P(D) + P(E) \quad \cdots ①$$

また $\begin{cases} A = C \cup D \\ B = D \cup E \end{cases}$ であるから $\begin{cases} P(A) = P(C) + P(D) & \cdots ② \\ P(B) = P(D) + P(E) & \cdots ③ \end{cases}$

① に ②, ③ を代入する．

$$P(A \cup B) = \underbrace{P(C) + P(D)}_{①} + \underbrace{P(E)}_{②}$$

$$= P(A) + P(B) - P(D)$$

$$\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

//