https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~d20003j/index.html

Def : 定義
Thm : 定理
Prop : 命題
Lem : 補題
Cor : 系
ex : 例
Rem : 注釈

関数は函数とかくことがある。

function の "fun" に相当する漢字は"函"であるが、常用漢字に入ってないという理由で学校の教科書は関数とかくらしい。

$A := B \iff$ "AをBでもってDefする"

《数の種類と関連の問題》

2023/04/13
(第1回)

◎ 自然数から複素数まで.

• 自然数 (natural number)

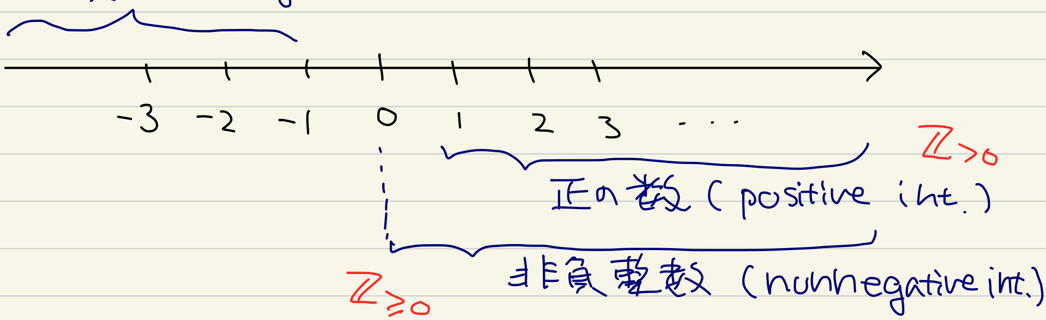
$$\{1, 2, 3, \cdots\cdots\} =: \mathbb{N}$$

(0を含む流儀もアリ)

• 整数 (integer)

$$\{0, \pm 1, \pm 2, \cdots\} =: \mathbb{Z}$$

「数」を意味するドイツ語 "Zhalen" に由来.



• 有理数 (rational number)

$$\left\{ \frac{n}{m} \;\middle|\; n \in \mathbb{Z},\ m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\} =: \mathbb{Q}$$

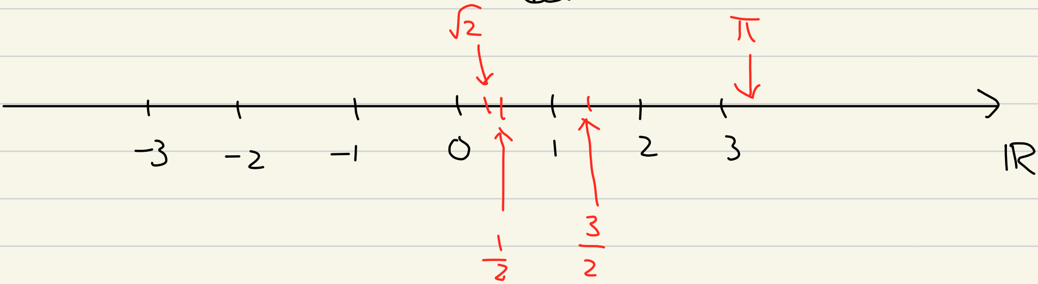
分数

「商」を意味するイタリア語 "quonziente" に由来.

- 実数 (real number)

2つの整数の比として表すことのできない数を無理数という ($\sqrt{2}$, π, e, $\cdots$)

$$\{\text{無理数}\} \cup \underbrace{\{\text{有理数}\}}_{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$$



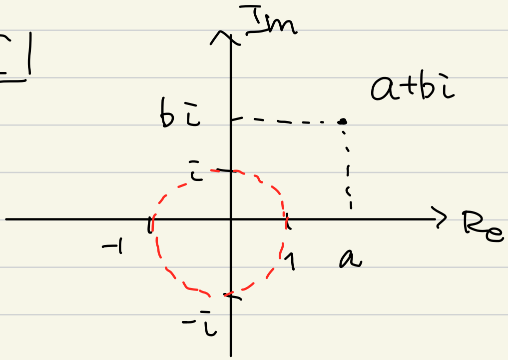
- 複素数 (complex number)

$\underset{\text{虚数単位}}{i}$: $i^2 = -1$ を満たす数 ($i \notin \mathbb{R}$)

$$\{\underset{\substack{\uparrow \\ \text{実部} \\ \text{(Real part)}}}{a} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{虚部} \\ \text{(Imaginaly part)}}}{b}i \mid a, b \in \mathbb{R}\} =: \mathbb{C}$$

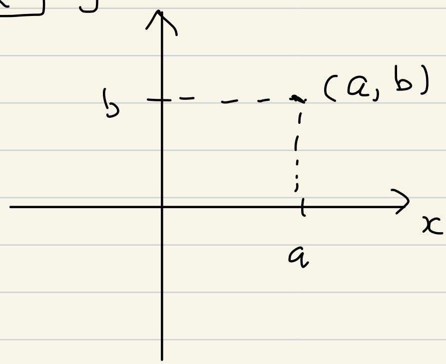
$$\simeq \mathbb{R}^2 \ (xy\text{-平面})$$

$\mathbb{C}$



$\simeq$

$\mathbb{R}^2$



$$\mathbb{C} \ni a+bi \xleftrightarrow{1:1} (a,b) \in \mathbb{R}^2$$

以上の関係は $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

◎ 自然数と素数

(prime number)

Def. 自然数 p が素数である

$:\Longleftrightarrow$ p は 1 と p 以外に約数をもたない。

divisor　　ただし1は除く　□

ex. $\underset{\text{偶素数}}{2}$, $\underbrace{3, 5, 7, 11, 13}_{\text{奇素数}}$, $\cdots$

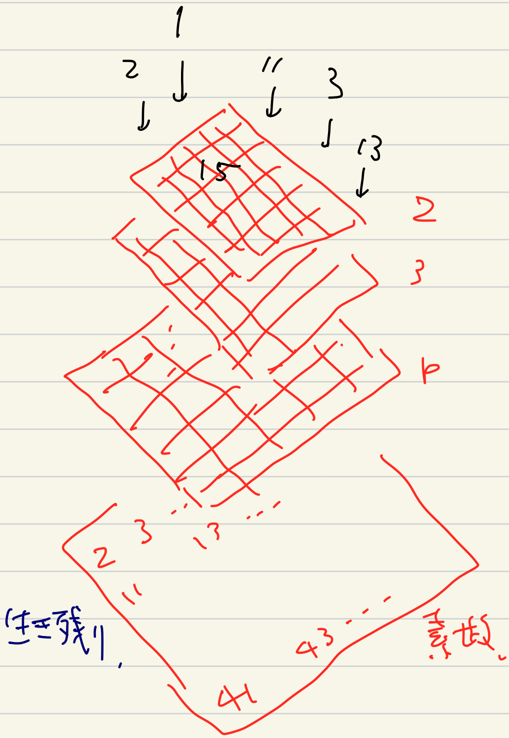
最小の素数で
唯一偶数

Rem. 1を素数としないのは素因数分解の一意性を保つため。

・問. 1〜50の間の素数を求めよ.

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~

エラトステネス の 篩(ふるい).
(Eratosthenes' sieve)



問. 720を素因数分解せよ.

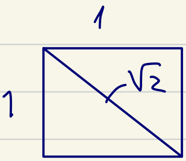
$720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$

$$
\begin{array}{r|r}
2 & 720 \\ \hline
2 & 360 \\ \hline
2 & 180 \\ \hline
3 & 90 \\ \hline
3 & 30 \\ \hline
2 & 10 \\ \hline
 & 5
\end{array}
$$

・素因数分解は基本的に難 〜> これを利用したのが…
RAS暗号.

たとえば
18,811,019 = 4423 × 4253.

◎ 実数と近似値（きんじち）.



循環しない.

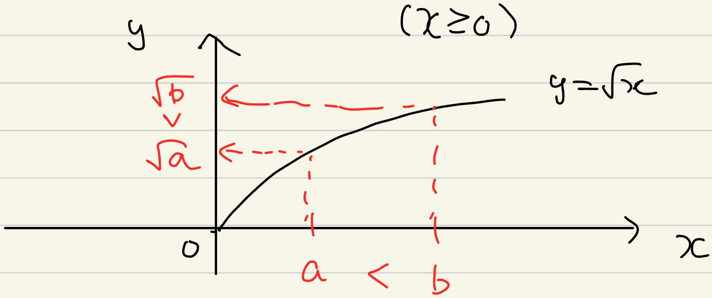
$\sqrt{2} = 1.41421356\cdots$

与えられた無理数の大きさを評価する方法を考えよう.

• 粗い評価.

"$\sqrt{7}$ の整数部分を求めよ".

無理関数 $y=\sqrt{x}$ は単調増加.
$(x \geq 0)$



$$\sqrt{1} < \sqrt{2} < \sqrt{3} < \sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{6} < \sqrt{7} < \sqrt{8} < \sqrt{9}$$

$$\Rightarrow\ 1 < \sqrt{2} < \sqrt{3} < 2 < \sqrt{5} < \sqrt{6} < \sqrt{7} < 2\sqrt{2} < 3$$

$$\Rightarrow\ 2 < \sqrt{7} < 3$$

$$\sqrt{7} = 2.\underbrace{***\cdots}$$

じゃあ小数部分はどーやって評価する?

- ニュートン法
(Newton)

$f(x) = x^2 - C$ という関数を考える.
$(C > 0)$

ステップ 1

$x_0 - 1 < \sqrt{C} < x_0$ を満たす整数 x_0 を求める. ($C=7$ なら $x_0 = 3$ だった)

ステップ 2

$x = x_0$ における $y = f(x)$ の接線の傾きを求める.

$$f'(x) = 2x \rightsquigarrow m(x_0) := f'(x_0) = 2x_0$$

ステップ 3

上で求めた接線の x 軸と交わる点を $(x_1, 0)$ とする.

$$\rightsquigarrow \quad m(x_0) = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}$$

$$\Longleftrightarrow \quad 2x_0 = \frac{x_0^2 - C}{x_0 - x_1}$$

$$\Longleftrightarrow \quad 2x_0(x_0 - x_1) = x_0^2 - C$$

$$\Longleftrightarrow \quad -2x_0x_1 = -x_0^2 - C$$

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{C}{x_0}\right)$$

……以外同様に

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right)$$

$$x_3 = \frac{1}{2}\left(x_2 + \frac{1}{x_2}\right)$$

$$\vdots$$

問. 上の手続きを x_2 まで実行し $\sqrt{7}$ の近似値を求めよ

$f(x)=x^2-7$ として Newton法を実行すればよい

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{7}{x_0}\right) = \frac{1}{2}\left(3 + \frac{7}{3}\right) = \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{16}\,8}{3} = 2.66\cdots$$

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{7}{x_1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{8}{3} + \frac{21}{8}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{64+63}{24}$$

$$= \frac{127}{48} = 2.645$$

$$\vdots$$

$$\boxed{\sqrt{7} = 2.64575\cdots}$$