線形代数 2 中間試験 対策問題集 (略解つき)

ver. 2023.11.27
担当: 山口航平
kohei.yamaguchi.28 [at] gmail.com
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~d20003j/lin_alg2.html

定義 1 (線形写像)**.** 写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ が性質 (L1), (L2) を満たすとき, f を線形写像という.

$$(L1); 各\ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n に対して\ f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y})\ が成り立つ.$$
$$(L2); 各\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n と各\ c \in \mathbb{R}\ に対して\ f(c\boldsymbol{x}) = cf(\boldsymbol{x})\ が成り立つ.$$

問 1. 次のベクトルの組は一次独立か否かを答えよ. またその理由も答えよ.

(1) $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(2) $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

略解 1. (1) 一次従属である. (理由は省略.)
(2) 一次独立である. (理由は省略.)

問 2. $\mathbb{R}^4$ の部分ベクトル空間

$$W := \mathrm{Span}\left(\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \subset \mathbb{R}^4$$

の基底を 1 組求めよ.

略解 2. $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ は一次独立であり, それらは W を張っていることから $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ は W の基底である.

問 3. 線形写像

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3; \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 - x_3 \\ x_2 - x_3 \\ x_1 - x_3 \end{pmatrix}$$

について.

(1) 任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$ について $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ を満たす行列 A を求めよ.
(2) $\mathrm{Im}(f)$ と $\mathrm{Ker}(f)$ の基底をそれぞれ与えよ.

略解 3. (1) 任意の $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ に対して

$$f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 - x_3 \\ x_2 - x_3 \\ x_1 - x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

なので $A=\begin{pmatrix}2&1&-1\\0&1&-1\\1&0&-1\end{pmatrix}$.

(2) $\mathrm{Im}(f)$ について: 例えば,

$$\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

が基底になる. (理由は略.)

$\mathrm{Ker}(f)$ について: このとき $\mathrm{Ker}(f)=\{\mathbf{0}\}$ となるので, 基底はありません.

問 4. 線形写像

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3;\quad \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}x_1\\x_1-x_2\\x_1+x_2\end{pmatrix}$$

について.

(1) 基底 $\{\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\}$ と基底 $\{\boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}2\\0\\-3\end{pmatrix},\boldsymbol{b}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\}$ に関する f の表現行列を与えよ.

(2) $f(\boldsymbol{a}_1+3\boldsymbol{a}_2)\in\mathbb{R}^3$ を $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3$ の一次結合で表せ.

略解 4. (1) まず, $f(\boldsymbol{a}_1)$, $f(\boldsymbol{a}_2)$ を計算する.

$$f(\boldsymbol{a}_1)=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix},\ f(\boldsymbol{a}_2)=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},$$

である. これらを $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3$ の一次結合でかく.

$$f(\boldsymbol{a}_1)=\frac{12}{7}\boldsymbol{b}_1+\frac{1}{7}\boldsymbol{b}_2-\frac{29}{7}\boldsymbol{b}_3,\quad f(\boldsymbol{a}_2)=-\frac{2}{7}\boldsymbol{b}_1+\frac{1}{7}\boldsymbol{b}_2+\frac{13}{7}\boldsymbol{b}_3.$$

以上から,

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}f(\boldsymbol{a_1}) & f(\boldsymbol{a_2})\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}\frac{12}{7}\boldsymbol{b}_1+\frac{1}{7}\boldsymbol{b}_2-\frac{29}{7}\boldsymbol{b}_3 & -\frac{2}{7}\boldsymbol{b}_1+\frac{1}{7}\boldsymbol{b}_2+\frac{13}{7}\boldsymbol{b}_3\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\boldsymbol{b_1}&\boldsymbol{b_2}&\boldsymbol{b_3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{12}{7}&-\frac{2}{7}\\\frac{1}{7}&\frac{1}{7}\\-\frac{29}{7}&+\frac{13}{7}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

したがって, 基底 $\{\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\}$ と基底 $\{\boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}2\\0\\-3\end{pmatrix},\boldsymbol{b}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\}$ に関する f の表現行列は $\begin{pmatrix}\frac{12}{7}&-\frac{2}{7}\\\frac{1}{7}&\frac{1}{7}\\-\frac{29}{7}&+\frac{13}{7}\end{pmatrix}$.

(2)

$$\begin{aligned}f(\boldsymbol{a}_1+3\boldsymbol{a}_2)&=f(\boldsymbol{a}_1)+3f(\boldsymbol{a}_2)\\&=\begin{pmatrix}f(\boldsymbol{a}_1)&f(\boldsymbol{a}_2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} \boldsymbol{b_1} & \boldsymbol{b_2} & \boldsymbol{b_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{12}{7} & -\frac{2}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{29}{7} & +\frac{13}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \boldsymbol{b_1} & \boldsymbol{b_2} & \boldsymbol{b_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{6}{7} \\ \frac{4}{7} \\ \frac{10}{7} \end{pmatrix} \\
&= \frac{6}{7}\boldsymbol{b}_1 + \frac{4}{7}\boldsymbol{b}_2 + \frac{10}{7}\boldsymbol{b}_3.
\end{aligned}
$$

(分数が出てきてしまいましたが, 本番ではもっと簡単になるように出題します.)