

中間試験の対策問題集

ver. 2023.06.07

担当: 山口航平

kohei.yamaguchi.28 [at] gmail.com

https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~d20003j/data_math.html

問 1. $g = \gcd(271, 78)$ で 271 と 78 の最大公約数を表す.

- (1) g を求めよ.
- (2) 方程式 $271x + 78y = g$ の整数解を 1 つ求めよ.

問 2. 次の複素数 z の極形式を求めよ.

- (1) $z = i$
- (2) $z = 1 + i$
- (3) $z = \sqrt{3} - i$

問 3 (発展). 複素数 z, w に対して次が成り立つことを証明せよ.

- (1) $|zw| = |z||w|$.
- (2) $\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w)$.
- (3) $w \neq 0$ とする. このとき $\arg(z/w) = \arg(z) - \arg(w)$.

問 4. 方程式 $z^3 = 1$ の解をすべて求めよ.

問 5. すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ が成り立つことを数学的帰納法により示せ.

問 6 (発展). $\binom{n}{k}$ で二項係数を表す. 以下に答えよ.

- (1) 等式

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

が成り立つことを示せ.

- (2) すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i = (1+x)^n$$

が成り立つことを数学的帰納法により示せ.

問 7. 写像 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 5x_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

と定義する. 次に答えよ.

- (1) f は線形写像であることを証明せよ.
- (2) f に対応する行列, すなわち $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ を満たす行列 A を求めよ.