線形代数 1 中間試験 解答 実施時間: 14:50–16:00 (70 分間)

ver. 2023.06.10

担当: 山口航平

kohei.yamaguchi.28 [at] gmail.com

https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~d20003j/lin_alg1.html

定義 1 (線形写像)**.** 写像 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ が性質 (L1), (L2) を満たすとき, f を線形写像という.

$$(L1); \text{各 } \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^2 \text{に対して } f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y}) \text{ が成り立つ.}$$
$$(L2); \text{各 } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \text{と各 } c \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(c\boldsymbol{x}) = cf(\boldsymbol{x}) \text{ が成り立つ.}$$

問 1 (配点:15)**.** 3 つの行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \\ -3 & -3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$ において, 積が定義される行列のペアを全て答え, それらを計算せよ.

解答 1. 積が定義できる行列のペアは, AB と CA と BB のみ.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+(-1)+4 & 1+1+(-2) & 1+(-1)+2 \\ -1+1+6 & -1+(-1)+(-3) & -1+1+3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 6 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$
$$CA = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \\ -3 & -3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+(-1) & 2+(-1) & 4+3 \\ 4+(-3) & 4+(-3) & 8+9 \\ -3+3 & -3+3 & -6+(-9) \\ -3+4 & -3+4 & -6+(-12) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 17 \\ 0 & 0 & -15 \\ 1 & 1 & -18 \end{pmatrix}.$$
$$BB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1-1+2 & 1+1-1 & 1-1+1 \\ -1-1-2 & -1+1+1 & -1-1-1 \\ 2+1+2 & 2-1-1 & 2+1+1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & -3 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

問 2 (配点:(1) 15, (2) 10)**.** 写像 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を $f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ で定義する. 以下の設問に答えよ.

(1) 写像 f は線形写像であることを (線形写像の定義に則って) 証明せよ.

(2) 線形写像 f に対応する行列を求めよ. ($f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ を満たす行列 A を求めよ.)

解答 2. (1); (L1) 各 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対して,

$$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f(\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2(x_1+y_1)+(x_2+y_2) \\ (x_1+y_1)+(x_2+y_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1+x_2 \\ x_1+x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2y_1+y_2 \\ y_1+y_2 \end{pmatrix} = f(\boldsymbol{x})+f(\boldsymbol{y})$$

が成り立つ. また,

(L2) 各 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ と各 $c \in \mathbb{R}$ に対して,

$$f(c\boldsymbol{x}) = f(\begin{pmatrix} cx_1 \\ cx_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2(cx_1)+(cx_2) \\ (cx_1)+(cx_2) \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 2x_1+x_2 \\ x_1+x_2 \end{pmatrix} = cf(\boldsymbol{x})$$

が成り立つ. 以上より写像 f は線形写像である.

(2) 標準ベクトル $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対して, f の定義から

$$f(\boldsymbol{e}_1) = \begin{pmatrix} 2\cdot1+1\cdot0 \\ 1\cdot1+1\cdot0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f(\boldsymbol{e}_2) = \begin{pmatrix} 2\cdot0+1\cdot1 \\ 1\cdot0+1\cdot1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

任意の $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) &= f(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2) \\ &= x_1 f(\boldsymbol{e}_1) + x_2 f(\boldsymbol{e}_2) \qquad (f \text{ の線形性を用いた.}) \\ &= x_1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

以上から線形写像 f に対応する行列は $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

問 3 (配点:10)**.** 二次元ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ を正の方向に $\frac{\pi}{6}$ だけ回転移動して得られるベクトルを求めよ.

解答 3. $\frac{\pi}{6}$ の回転移動に対応する行列は $\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & -\sin\frac{\pi}{6} \\ \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ である. したがってベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ を $\frac{\pi}{6}$ の回転移動して得られるベクトルは次のようになる.

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}-3}{2} \\ \frac{1+3\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

問 4 (配点:20)**.** 連立方程式

$$\begin{cases} x+2y=3 \\ 3x-y+z=0 \\ 2x+y+z=1 \end{cases}$$

を解け.

解答 4. 対応する係数拡大行列 A は

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

である．与えられた連立方程式は例えば以下のように A に対して行基本変形を行えば解ける．

$$\begin{aligned}
A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) &\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -7 & 1 & -9 \\ 0 & -3 & 1 & -5 \end{array}\right) \qquad (②+①\times(-3), ③+①\times(-2)) \\
&\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -5 \\ 0 & -7 & 1 & -9 \end{array}\right) \qquad (② \leftrightarrow ③) \\
&\to \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & 0 & 9 \\ 0 & -3 & 1 & -5 \\ 0 & -21 & 3 & -27 \end{array}\right) \qquad (①\times 3, ③\times 3,) \\
&\to \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -4 & 8 \end{array}\right) \qquad (①+②\times 2, ③+②\times(-7)) \\
&\to \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \qquad (③\times -(1/4)) \\
&\to \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \qquad (①+③\times(-2), ②+③\times(-1)) \\
&\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \qquad (①\times 1/3, ②\times -(1/3)).
\end{aligned}$$

したがって与えられた連立方程式の解は $(x, y, z) = (1, 1, -2)$.

問 5 (配点:20)**.** 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ の逆行列 A^{-1} を求めよ．

解答 5.

$$\begin{aligned}
A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad (③+①\times 2) \\
\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad (②+③).
\end{aligned}$$

従って $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

問 6 (発展, 配点:10)**.** 一般に, 写像 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ が線形写像であるならば, 任意の (すべての)$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ に対して $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ を満たす (2×2) 行列 A が存在することを証明せよ.

解答 6. 標準ベクトル $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対して,

$$f(\boldsymbol{e_1}) = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \quad f(\boldsymbol{e_2}) = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \qquad (a, b, c, d \in \mathbb{R})$$

とかく. ここで任意の $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) &= f(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2) \\ &= f(x_1\boldsymbol{e}_1) + f(x_2\boldsymbol{e}_2) \qquad (f \text{ の線形性 } (L1) \text{ を使った}) \\ &= x_1 f(\boldsymbol{e}_1) + x_2 f(\boldsymbol{e}_2) \qquad (f \text{ の線形性 } (L2) \text{ を使った}) \\ &= x_1 \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる.