線形代数 1 中間試験 実施時間: 14:50–16:00 (70 分間)

ver. 2023.06.06
担当: 山口航平
kohei.yamaguchi.28 [at] gmail.com
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~d20003j/lin_alg1.html

定義 1 (線形写像)**.** 写像 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ が性質 (L1), (L2) を満たすとき, f を線形写像という.

$$(L1);\text{各 } \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^2 \text{に対して } f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=f(\boldsymbol{x})+f(\boldsymbol{y}) \text{ が成り立つ.}$$
$$(L2);\text{各 } \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2 \text{と各 } c\in\mathbb{R} \text{ に対して } f(c\boldsymbol{x})=cf(\boldsymbol{x}) \text{ が成り立つ.}$$

問 1 (配点:15)**.** 3 つの行列 $A=\begin{pmatrix}1&1&2\\-1&-1&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&1&-1\\2&-1&1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2&1\\4&3\\-3&-3\\-3&-4\end{pmatrix}$ において, 積が定義できる行列のペアを全て答え, それらを計算せよ.

問 2 (配点:(1) 15,　(2) 10)**.** 写像 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ を $f(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}2x_1+x_2\\x_1+x_2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$ で定義する. 以下の設問に答えよ.

(1) 写像 f は線形写像であることを (線形写像の定義に則って) 証明せよ.

(2) 線形写像 f に対応する行列を求めよ. ($f(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$,　$\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2$ を満たす行列 A を求めよ.)

問 3 (配点:10)**.** 二次元ベクトル $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$ を正の方向に $\frac{\pi}{6}$ だけ回転移動して得られるベクトルを求めよ.

問 4 (配点:20)**.** 連立方程式

$$\begin{cases}x+2y=3\\3x-y+z=0\\2x+y+z=1\end{cases}$$

を解け.

問 5 (配点:20)**.** 行列 $A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\-2&0&3\end{pmatrix}$ の逆行列 A^{-1} を求めよ.

問 6 (発展, 配点:10)**.** 一般に, 写像 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ が線形写像であるならば, 任意の (すべての)$\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2$ に対して $f(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$ を満たす (2×2) 行列 A が存在することを証明せよ.