データサイエンス基礎数理 中間試験　実施時間: 13:10–14:20 (70 分間)

ver. 2023.06.06
担当: 山口航平
kohei.yamaguchi.28 [at] gmail.com
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~d20003j/data_math.html

定義 1 (線形写像)**.** 写像 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ が性質 (L1), (L2) を満たすとき, f を線形写像という.

$$(L1);\text{各 } \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^2 \text{に対して } f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=f(\boldsymbol{x})+f(\boldsymbol{y}) \text{ が成り立つ.}$$
$$(L2);\text{各 } \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2 \text{と各 } c\in\mathbb{R} \text{ に対して } f(c\boldsymbol{x})=cf(\boldsymbol{x}) \text{ が成り立つ.}$$

問 1 (配点 20)**.** $g=gcd(70,61)$ で 70 と 61 の最大公約数を表す.
(1) g を求めよ.
(2) 方程式 $70x+61y=g$ の整数解を 1 つ求めよ.

解答 1. (1); Euclid の互除法を用いる.

$$\begin{aligned} 70&=1\cdot 61+9 && ④\\ 61&=6\cdot 9+7 && ③\\ 9&=1\cdot 7+2 && ②\\ 7&=3\cdot 2+1 && ①\\ 2&=2\cdot 1 \end{aligned}$$

従って $g=1$.
(2); (1) で行なった Euclid の互除法の逆を考える.

$$\begin{aligned} 1&=7-3\cdot 2 && \text{①を用いた.}\\ 1&=7-3(9-1\cdot 7) && \text{②を用いた.}\\ 1&=-3\cdot 9+4\cdot 7 \\ 1&=-3\cdot 9+4(61-6\cdot 9) && \text{③を用いた.}\\ 1&=4\cdot 61+(-27)\cdot 9 \\ 1&=4\cdot 61+(-27)(70-1\cdot 61) && \text{④を用いた.}\\ 1&=-27\cdot 70+31\cdot 61 \end{aligned}$$

従って $(x,y)=(-27,31)$ は 1 つの解である.

問 2 (配点:20)**.** 方程式 $z^5=1$ の解をすべて求めよ. 但し, 解は極形式で答えてもよい.

解答 2. $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ とおく. 但し $r>0,\ 0\le\theta<2\pi$ とする. このとき次のようになる.

$$z^5=1\Leftrightarrow (r(\cos\theta+i\sin\theta))^5=1+0i\Leftrightarrow r^5(\cos 5\theta+i\sin 5\theta)=1+0i\Leftrightarrow \begin{cases} r^5=1\\ \cos 5\theta=1\\ \sin 5\theta=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r=1\\ 5\theta=2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})\end{cases}$$

$0\le\theta<2\pi$ なので, $\theta=0,\frac{2}{5}\pi,\frac{4}{5}\pi,\frac{6}{5}\pi,\frac{8}{5}\pi$ となる. 以上から方程式の解は次のようになる.

$$z=\cos\theta+i\sin\theta,\quad \theta=0,\frac{2}{5}\pi,\frac{4}{5}\pi,\frac{6}{5}\pi,\frac{8}{5}\pi.$$

問 3 (配点:25)**.** すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $\sum_{i=1}^{n} 3^i = \frac{3}{2}(3^n - 1)$ が成り立つことを数学的帰納法により示せ.

解答 3. n に関する帰納法により示す.

(i) $n = 1$ のとき

$$\frac{3}{2}(3^1 - 1) = 3 = \sum_{i=1}^{1} 3^i$$

となり真.

(ii) $n = k$ のとき, すなわち $\sum_{i=1}^{k} 3^i = \frac{3}{2}(3^k - 1)$ は真であると仮定する. ここで $n = k + 1$ の場合を考える.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k+1} 3^i &= 3^{k+1} + \sum_{i=1}^{k} 3^i \\ &= 3^{k+1} + \frac{3}{2}(3^k - 1) \qquad \text{(仮定を用いた.)} \\ &= 3^{k+1} + \frac{3^{k+1}}{2} - \frac{3}{2} \\ &= \frac{3}{2}(2 \cdot 3^k + 3^k - 1) \\ &= \frac{3}{2}(3^{k+1} - 1)\end{aligned}$$

となり $n = k + 1$ の場合も真.

(i),(ii) からすべての自然数 n について真である.

問 4 (配点:(1) 15 (2) 10)**.** 写像 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を $f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ で定義する. 以下の設問に答えよ.

(1) 写像 f は線形写像であることを (線形写像の定義に則って) 証明せよ.

(2) 線形写像 f に対応する行列を求めよ. ($f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ を満たす行列 A を求めよ.)

解答 4. (1); (L1) 各 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対して,

$$f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = f(\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) \\ (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2y_1 + y_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y})$$

が成り立つ. また,

(L2) 各 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ と各 $c \in \mathbb{R}$ に対して,

$$f(c\boldsymbol{x}) = f(\begin{pmatrix} cx_1 \\ cx_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2(cx_1) + (cx_2) \\ (cx_1) + (cx_2) \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} = cf(\boldsymbol{x})$$

が成り立つ. 以上より写像 f は線形写像である.

(2) 標準ベクトル $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対して, f の定義から

$$f(\boldsymbol{e}_1) = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f(\boldsymbol{e}_2) = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

任意の $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) &= f(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2) \\ &= x_1 f(\boldsymbol{e}_1) + x_2 f(\boldsymbol{e}_2) \qquad (f \text{ の線形性を用いた.}) \\ &= x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

以上から線形写像 f に対応する行列は $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

問 5 (発展, 配点:(1) 5 (2) 5)**.** $\binom{n}{k}$ で二項係数を表す. 以下に答えよ.

(1) 等式

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}, \qquad k = 1, \dots, n$$

が成り立つことを示せ.

(2) すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i = (1+x)^n$$

が成り立つことを数学的帰納法により示せ.

解答 5. (1);

$$\begin{aligned} \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k+1)!}(k + (n-k+1)) \\ &= \frac{n!(n+1)}{k!(n-k+1)!} \\ &= \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!} = \binom{n+1}{k}. \end{aligned}$$

(2); n に関する帰納法により示す.

(i) $n = 1$ のとき

$$(1+x)^1 = 1 + x = \sum_{i=0}^{1} \binom{1}{i} x^i$$

となり真.

(ii) $n = k$ のとき, すなわち $\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} x^i = (1+x)^k$ は真であると仮定する. ここで $n = k+1$ の場合を考える.

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} x^i &= \binom{k+1}{0} + \sum_{i=1}^{k} \binom{k+1}{i} x^i + \binom{k+1}{k+1} x^{k+1} \\ &= (1 + x^{k+1}) + \sum_{i=1}^{k} \left(\binom{k}{i-1} + \binom{k}{i}\right) x^i \qquad ((1) \text{ の結果を用いた.}) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (1+x^{k+1}) + x\sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i-1}x^{i-1} + \sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}x^{i} \\
&= (1+x^{k+1}) + x\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}x^{i} + \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}x^{i} - (1+x^{k+1}) \\
&= (1+x^{k+1}) + x(1+x)^{k} + (1+x)^{k} - (1+x^{k+1}) \qquad \text{(仮定を用いた.)} \\
&= (1+x)(1+x)^{k} = (1+x)^{k+1}
\end{aligned}
$$

となり $n = k+1$ の場合も真.

(i),(ii) からすべての自然数 n について真である.