

定義 1 (線形写像). 写像 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ が性質 (L1), (L2) を満たすとき, f を線形写像という.

(L1); 各 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ に対して $f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$ が成り立つ.

(L2); 各 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ と各 $c \in \mathbb{R}$ に対して $f(c\mathbf{x}) = cf(\mathbf{x})$ が成り立つ.

問 1 (配点 20). $g = \gcd(70, 61)$ で 70 と 61 の最大公約数を表す.

(1) g を求めよ.

(2) 方程式 $70x + 61y = g$ の整数解を 1 つ求めよ.

問 2 (配点:20). 方程式 $z^5 = 1$ の解をすべて求めよ. 但し, 解は極形式で答えてもよい.

問 3 (配点:25). すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $\sum_{i=1}^n 3^i = \frac{3}{2}(3^n - 1)$ が成り立つことを数学的帰納法により示せ.

問 4 (配点:(1) 15 (2) 10). 写像 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ で定義する. 以下の設問に答えよ.

(1) 写像 f は線形写像であることを (線形写像の定義に則って) 証明せよ.

(2) 線形写像 f に対応する行列を求めよ. ($f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ を満たす行列 A を求めよ.)

問 5 (発展, 配点:(1) 5 (2) 5). $\binom{n}{k}$ で二項係数を表す. 以下に答えよ.

(1) 等式

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}, \quad k = 1, \dots, n$$

が成り立つことを示せ.

(2) すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i = (1+x)^n$$

が成り立つことを数学的帰納法により示せ.