線形代数 2 中間試験 (略解つき)

ver. 2023.11.29
担当: 山口航平
kohei.yamaguchi.28 [at] gmail.com
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~d20003j/lin_alg2.html

問 1 (配点:20)**.** 次のベクトルの組は一次独立か否かを答えよ．またその理由も答えよ．

$$\left\{ \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^4$$

略解 1. 一次独立である．(理由は省略．)

問 2 (配点:20)**.** $\mathbb{R}^4$ の部分ベクトル空間

$$W := \mathrm{Span}\left(\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix} \right) \subset \mathbb{R}^4$$

の基底を 1 組求めよ．

略解 2. $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ は一次独立であり，$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ は一次従属である．なので $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ は W の基底である．

問 3 (配点:25((1) が 10, (2) が 15.))**.** 線形写像

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3; \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_2 - x_3 \\ 2x_2 + 6x_3 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 \end{pmatrix}$$

について．

(1) 任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$ について $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ を満たす行列 A を求めよ．

(2) $\mathrm{Im}(f)$ と $\mathrm{Ker}(f)$ の基底をそれぞれ与えよ．

略解 3. (1) 任意の $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ に対して

$$f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 - x_3 \\ 2x_2 + 6x_3 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

なので $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

(2) $\mathrm{Im}(f)$ について: 例えば，

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

が基底になる. (理由は略.)

Ker(f) について: 例えば,

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

が基底になる. (理由は略.)

問 4 (配点:25((1) が 10, (2) が 15.)). 線形写像

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3; \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

について.

(1) 基底 $\{\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ と基底 $\{\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\}$ に関する f の表現行列を与えよ.

(2) $f(2\boldsymbol{a}_1 + 3\boldsymbol{a}_2) \in \mathbb{R}^3$ を $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ の一次結合で表せ.

略解 4. (1) まず, $f(\boldsymbol{a}_1)$, $f(\boldsymbol{a}_2)$ を計算する.

$$f(\boldsymbol{a}_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ f(\boldsymbol{a}_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

である. これらを $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ の一次結合でかく.

$$f(\boldsymbol{a}_1) = -2\boldsymbol{b}_1 - 5\boldsymbol{b}_2 + 6\boldsymbol{b}_3, \quad f(\boldsymbol{a}_2) = -\boldsymbol{b}_1 - 2\boldsymbol{b}_2 + 2\boldsymbol{b}_3.$$

以上から,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} f(\boldsymbol{a_1}) & f(\boldsymbol{a_2}) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -2\boldsymbol{b}_1 - 5\boldsymbol{b}_2 + 6\boldsymbol{b}_3 & -\boldsymbol{b}_1 - 2\boldsymbol{b}_2 + 2\boldsymbol{b}_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{b_1} & \boldsymbol{b_2} & \boldsymbol{b_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -5 & -2 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

したがって, 基底 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$ と基底 $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3\}$ に関する f の表現行列は $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -5 & -2 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$.

(2)

$$\begin{aligned} f(2\boldsymbol{a}_1 + 3\boldsymbol{a}_2) &= 2f(\boldsymbol{a}_1) + 3f(\boldsymbol{a}_2) \\ &= \begin{pmatrix} f(\boldsymbol{a}_1) & f(\boldsymbol{a}_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{b_1} & \boldsymbol{b_2} & \boldsymbol{b_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -5 & -2 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{b_1} & \boldsymbol{b_2} & \boldsymbol{b_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 \\ -16 \\ 18 \end{pmatrix} \\ &= -7\boldsymbol{b}_1 - 16\boldsymbol{b}_2 + 18\boldsymbol{b}_3. \end{aligned}$$

問 5 (配点:10)**.** 線形写像 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ と k 個のベクトル $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_k\in\mathbb{R}^n$ について.
$\{f(\boldsymbol{v}_1),f(\boldsymbol{v}_2),\ldots,f(\boldsymbol{v}_k)\}\subset\mathbb{R}^m$ が一次独立ならば, $\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_k\}\subset\mathbb{R}^n$ も一次独立であることを示せ.

略解 5. $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_k$ の任意の一次関係式

$$c_1\boldsymbol{v}_1+c_2\boldsymbol{v}_2+\cdots+c_k\boldsymbol{v}_k=\boldsymbol{0},\quad c_1,\ldots,c_k\in\mathbb{R}$$

を考える. ここで両辺に線形写像 f を施す.

$$\begin{aligned}&f(c_1\boldsymbol{v}_1+c_2\boldsymbol{v}_2+\cdots+c_k\boldsymbol{v}_k)=f(\boldsymbol{0})\\&c_1f(\boldsymbol{v}_1)+c_2f(\boldsymbol{v}_2)+\cdots+c_kf(\boldsymbol{v}_k)=\boldsymbol{0}\qquad(f\text{ が線形写像であることを使った.})\end{aligned}$$

ところで, $\{f(\boldsymbol{v}_1),f(\boldsymbol{v}_2),\ldots,f(\boldsymbol{v}_k)\}\subset\mathbb{R}^m$ は一次独立であるから, $c_1=c_2=\cdots=c_k=0$ である. したがって $\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_k\}\subset\mathbb{R}^n$ は一次独立である.