$SL_2(\mathbb{F}_q)$ の表現論

山口　航平

3 月 8 日 木曜日

Outline

発表の流れ

目標

$SL_2(\mathbb{F}_q)$ の標数 0 の体 K 上の既約指標を分類し計算する.

[Reference] *Representations of* $SL_2(\mathbb{F}_q)$,Cédric Bonnafé,Springer,2011

発表の流れ

目標

$SL_2(\mathbb{F}_q)$ の標数 0 の体 K 上の既約指標を分類し計算する.

1. $G = SL_2(\mathbb{F}_q)$ の共役類.

[Reference] *Representations of* $SL_2(\mathbb{F}_q)$,Cédric Bonnafé,Springer,2011

発表の流れ

目標

$SL_2(\mathbb{F}_q)$ の標数 0 の体 K 上の既約指標を分類し計算する．

1. $G = SL_2(\mathbb{F}_q)$ の共役類.
2. Harish-Chandra 誘導.

[Reference] *Representations of* $SL_2(\mathbb{F}_q)$,Cédric Bonnafé,Springer,2011

発表の流れ

目標

$SL_2(\mathbb{F}_q)$ の標数 0 の体 K 上の既約指標を分類し計算する.

1. $G = SL_2(\mathbb{F}_q)$ の共役類.
2. Harish-Chandra 誘導.
3. 既約指標を計算.

[Reference] *Representations of* $SL_2(\mathbb{F}_q)$,Cédric Bonnafé,Springer,2011

Notation

Notation

Notation

- $q := p^n$(p は奇素数)，$\mathbb{F}_q$:位数 q の体.

Notation

- $q := p^n$(p は奇素数), $\mathbb{F}_q$:位数 q の体.
- $G = SL_2(\mathbb{F}_q)$.

Notation

- $q := p^n$(p は奇素数)，$\mathbb{F}_q$:位数 q の体.
- $G = SL_2(\mathbb{F}_q)$.
- $B = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & x \\ 0 & a^{-1} \end{smallmatrix} \right) \middle| a \in \mathbb{F}_q^\times, x \in \mathbb{F}_q \right\}$,(ボレル部分群)

Notation

- $q := p^n$(p は奇素数)，$\mathbb{F}_q$:位数 q の体.
- $G = SL_2(\mathbb{F}_q)$.
- $B = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & x \\ 0 & a^{-1} \end{smallmatrix}\right) \middle| a \in \mathbb{F}_q^\times, x \in \mathbb{F}_q \right\}$,(ボレル部分群)
- $T = \left\{ d(a) = \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{smallmatrix}\right) \in G \middle| a \in \mathbb{F}_q^\times \right\}$,(分裂トーラス)

Notation

- $q := p^n$(p は奇素数)，$\mathbb{F}_q$:位数 q の体.
- $G = SL_2(\mathbb{F}_q)$.
- $B = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & x \\ 0 & a^{-1} \end{smallmatrix} \right) \middle| a \in \mathbb{F}_q^\times, x \in \mathbb{F}_q \right\}$,(ボレル部分群)
- $T = \left\{ d(a) = \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{smallmatrix} \right) \in G \middle| a \in \mathbb{F}_q^\times \right\}$,(分裂トーラス)
- $U = \{ \boldsymbol{u}(x) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix} \right) \in G | x \in \mathbb{F}_q \}$,(冪単群)

Notation

- $q := p^n$(p は奇素数)，$\mathbb{F}_q$:位数 q の体.
- $G = SL_2(\mathbb{F}_q)$.
- $B = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & x \\ 0 & a^{-1} \end{smallmatrix} \right) \middle| a \in \mathbb{F}_q^\times, x \in \mathbb{F}_q \right\}$,(ボレル部分群)
- $T = \left\{ d(a) = \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{smallmatrix} \right) \in G \middle| a \in \mathbb{F}_q^\times \right\}$,(分裂トーラス)
- $U = \{ \boldsymbol{u}(x) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix} \right) \in G | x \in \mathbb{F}_q \}$,(冪単群)
- $\mu_n := \{ x \in \overline{\mathbb{F}_p^\times} | x^n = 1 \}$

Notation

- $q := p^n$(p は奇素数)，$\mathbb{F}_q$:位数 q の体.
- $G = SL_2(\mathbb{F}_q)$.
- $B = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & x \\ 0 & a^{-1} \end{smallmatrix} \right) \middle| a \in \mathbb{F}_q^\times, x \in \mathbb{F}_q \right\}$,(ボレル部分群)
- $T = \left\{ d(a) = \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{smallmatrix} \right) \in G \middle| a \in \mathbb{F}_q^\times \right\}$,(分裂トーラス)
- $U = \{ \boldsymbol{u}(x) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix} \right) \in G | x \in \mathbb{F}_q \}$,(冪単群)
- $\mu_n := \{ x \in \overline{\mathbb{F}_p^\times} | x^n = 1 \}$
- $d' : \mu_{q+1} \hookrightarrow \mathbb{F}_{q^2}^\times \hookrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{F}_q}(\mathbb{F}_{q^2}) \xrightarrow{\sim} GL_2(\mathbb{F}_q)$
  $T' := d'(\mu_{q+1}) \subset SL_2(\mathbb{F}_q)$ (非分裂トーラス)

Conjugacy Classes of G

$SL_2(\mathbb{F}_q)$ の共役類

G の共役類

1. $\pm I_2$ (単位行列)
2. $\pm \boldsymbol{u}(1), \pm \boldsymbol{u}(z_0)$ (冪単)
3. $d(a), a \in [\mu_{q-1} \backslash \{\pm 1\} / \equiv]$ (分裂トーラス)
4. $d'(\xi), \xi \in [\mu_{q+1} \backslash \{\pm 1\} / \equiv]$ (非分裂トーラス)

(注) z_0 は $\mathbb{F}_q^\times$ における非平方数.
' $\equiv$ ' は同値関係 $x \equiv y \overset{def}{\Longleftrightarrow} y \in \{x, x^{-1}\}$ とする.

Harish-Chandar induction

Harish-Chandra 誘導の定義

Harish-Chandra 誘導の定義

- KG, KT はそれぞれ G, T の K 上の群環.

Harish-Chandra 誘導の定義

- KG, KT はそれぞれ G, T の K 上の群環.
- $KG - \mathrm{mod}, KT - \mathrm{mod}$ はそれぞれ KG, KT 加群の圏.

Harish-Chandra 誘導の定義

- KG, KT はそれぞれ G, T の K 上の群環.
- $KG - \mathrm{mod}, KT - \mathrm{mod}$ はそれぞれ KG, KT 加群の圏.
- $K[G/U]$ は左 G 右 T 加群.

Harish-Chandra 誘導の定義

- KG, KT はそれぞれ G, T の K 上の群環.
- $KG - \mathrm{mod}, KT - \mathrm{mod}$ はそれぞれ KG, KT 加群の圏.
- $K[G/U]$ は左 G 右 T 加群.
- $K[G/U]^* = K[U\backslash G]$ は左 T 右 G 加群.

Harish-Chandra 誘導の定義

- KG, KT はそれぞれ G, T の K 上の群環.
- $KG-\mathrm{mod}, KT-\mathrm{mod}$ はそれぞれ KG, KT 加群の圏.
- $K[G/U]$ は左 G 右 T 加群.
- $K[G/U]^* = K[U\backslash G]$ は左 T 右 G 加群.

Harish-Chandra 誘導, 制限の定義

$$\mathscr{R}_K\colon KT-\mathrm{mod} \longrightarrow KG-\mathrm{mod}, \quad (V \longmapsto K[G/U]\otimes_{KT} V)$$
$$^*\mathscr{R}_K\colon KG-\mathrm{mod} \longrightarrow KT-\mathrm{mod}, \quad (W \longmapsto K[U\backslash G]\otimes_{KG} W)$$

Mackey Fomula

Mackey 公式

- $\mathscr{K}_0(KG), \mathscr{K}_0(KT)$ は Grothendiek 群．(指標群と同一視できる)
- $Irr(T), Irr(G)$ はそれぞれ T, G の既約指標全体の集合.

指標群の Harish-Chandra 誘導, 制限

$\mathrm{R}\colon \mathscr{K}_0(KT) \longrightarrow \mathscr{K}_0(KG) \quad ([V]_T \longmapsto [K[G/U] \otimes_{KT} V]_G)$
${}^*\mathrm{R}\colon \mathscr{K}_0(KG) \longrightarrow \mathscr{K}_0(KT) \quad ([W]_G \longmapsto [K[U\backslash G] \otimes_{KG} W]_T)$

Mackey 公式

- $\mathscr{K}_0(KG), \mathscr{K}_0(KT)$ は Grothendiek 群．(指標群と同一視できる)
- $Irr(T), Irr(G)$ はそれぞれ T, G の既約指標全体の集合.

指標群の Harish-Chandra 誘導, 制限

$\mathrm{R}\colon \mathscr{K}_0(KT) \longrightarrow \mathscr{K}_0(KG) \quad ([V]_T \longmapsto [K[G/U] \otimes_{KT} V]_G)$
${}^*\mathrm{R}\colon \mathscr{K}_0(KG) \longrightarrow \mathscr{K}_0(KT) \quad ([W]_G \longmapsto [K[U\backslash G] \otimes_{KG} W]_T)$

Mackey 公式

$\alpha \in Irr(T) \subset \mathscr{K}_0(KT)$ とする。このとき ${}^*\mathrm{R}\,(\mathrm{R}(\alpha)) = \alpha + \alpha^{-1}$ が成り立つ.

Irreducible Representation

Harish-Chandra 誘導から得られる G の既約指標

$\alpha \in Irr(T)$ を固定する.

Harish-Chandra 誘導から得られる G の既約指標

$\alpha \in Irr(T)$ を固定する．

- $\alpha^2 \neq 1$ とする．$\langle \mathrm{R}(\alpha), \mathrm{R}(\alpha) \rangle_G = 1$ であるから $\mathrm{R}(\alpha) \in Irr(G)$.

Harish-Chandra 誘導から得られる G の既約指標

$\alpha \in Irr(T)$ を固定する.

- $\alpha^2 \neq 1$ とする. $\langle \mathrm{R}(\alpha), \mathrm{R}(\alpha) \rangle_G = 1$ であるから $\mathrm{R}(\alpha) \in Irr(G)$.
- $\alpha = \alpha_0$,(位数 2 の指標) とする.$\langle \mathrm{R}(\alpha), \mathrm{R}(\alpha) \rangle_G = 2$ となり,$\mathrm{R}(\alpha_0) = \mathrm{R}_+(\alpha_0) + \mathrm{R}_-(\alpha_0) \quad (\mathrm{R}_\pm(\alpha_0) \in Irr(G))$.

Harish-Chandra 誘導から得られる G の既約指標

$\alpha \in \mathit{Irr}(T)$ を固定する.

- $\alpha^2 \neq 1$ とする. $\langle \mathrm{R}(\alpha), \mathrm{R}(\alpha) \rangle_G = 1$ であるから $\mathrm{R}(\alpha) \in \mathit{Irr}(G)$.
- $\alpha = \alpha_0$,(位数 2 の指標) とする.$\langle \mathrm{R}(\alpha), \mathrm{R}(\alpha) \rangle_G = 2$ となり,$\mathrm{R}(\alpha_0) = \mathrm{R}_+(\alpha_0) + \mathrm{R}_-(\alpha_0) \quad (\mathrm{R}_\pm(\alpha_0) \in \mathit{Irr}(G))$.
- $\alpha = 1_T$ とする. $\langle \mathrm{R}(1_T), \mathrm{R}(1_T) \rangle_G = 2$ となり $\mathrm{R}(1_T)$ が 1_G を含んでいることから $\mathrm{R}(1_T) = 1_G + St_G, (St_G \in \mathit{Irr}\ G)$.
  St_G を **Steinberg** 指標という.

Calculation of Character

指標公式

Harish-Chandra 誘導の指標公式

$\alpha \in \mathscr{K}_0(KT)$ をとる。このとき $g \in G$ に対して
$\mathrm{R}(\alpha)(g) = \frac{1}{|T|}\sum_{t\in T}\mathrm{Tr}\left((g,t),K[G/U]\right)\alpha(t^{-1})$ が成り立つ。

(注)$\mathrm{Tr}((g,t),K[G/U]) = \#\{xU \in G/U | gxtU = xU\}$

$\mathrm{R}(\alpha), \alpha^2 \neq 1$ の値は指標公式により簡単に計算できる.

Calculation of Character

$St_G(g)$ の計算

$St_G(g)$ の計算

- 指標公式より $\mathrm{R}(1_T)(g) = \frac{1}{|T|}\sum_{t \in T} \mathrm{Tr}_{K[G/U]}(g, t)$

$St_G(g)$ の計算

- 指標公式より $\mathrm{R}(1_T)(g) = \frac{1}{|T|}\sum_{t\in T}\mathrm{Tr}_{K[G/U]}(g,t)$
- $\mathrm{R}(1_T)(g)$ は $K[\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)]$ に g を作用させたときの固定点の数である.

$St_G(g)$ の計算

- 指標公式より $\mathrm{R}(1_T)(g) = \frac{1}{|T|}\sum_{t\in T} \mathrm{Tr}_{K[G/U]}(g,t)$
- $\mathrm{R}(1_T)(g)$ は $K[\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)]$ に g を作用させたときの固定点の数である.
- 共役類ごとに $g\cdot v = \lambda\cdot v$ であるような $[v]\in\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)$ を数える.

$St_G(g)$ の計算

- 指標公式より $\mathrm{R}(1_T)(g) = \frac{1}{|T|}\sum_{t\in T}\mathrm{Tr}_{K[G/U]}(g,t)$
- $\mathrm{R}(1_T)(g)$ は $K[\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)]$ に g を作用させたときの固定点の数である.
- 共役類ごとに $g\cdot v = \lambda\cdot v$ であるような $[v]\in\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)$ を数える.
- $St_G(g) = \mathrm{R}(1_T)(g) - 1$ である.

Calculation of Character

$\mathrm{R}_{\pm}(\alpha_0)(g)$ の計算

$\mathrm{R}_{\pm}(\alpha_0)(g)$ の性質

g が対角化可能ならば $\mathrm{R}_{\pm}(\alpha_0)(g) = \frac{1}{2}\mathrm{R}(\alpha_0)(g)$

$\mathrm{R}_{\pm}(\alpha_0)(g)$ の計算

$\mathrm{R}_{\pm}(\alpha_0)(g)$ の性質

g が対角化可能ならば $\mathrm{R}_{\pm}(\alpha_0)(g) = \frac{1}{2}\mathrm{R}(\alpha_0)(g)$

$\mathbf{R}_{\pm}(\alpha_0)$ の U への制限

$\boldsymbol{u}(x) \in U$ をとる．このとき

$\mathrm{R}_{\pm}(\alpha_0)(\boldsymbol{u}(x)) = 1 + \Upsilon_{+}(\boldsymbol{u}(x)) + \Upsilon_{-}(\boldsymbol{u}(x))$ である．ただし

- $\Upsilon_{+} : U \longrightarrow K, \boldsymbol{u}(x) \longmapsto \sum_{c:square} \chi_{+}(cx)$
- $\Upsilon_{-} : U \longrightarrow K, \boldsymbol{u}(x) \longmapsto \sum_{c:nonsquare} \chi_{+}(cx)$
- χ_{+} は $\mathbb{F}_q$ の加法指標 $(\chi_{+}(a+b) = \chi_{+}(a)\chi_{+}(b))$

Calculation of Character

$\Upsilon_{\pm}(u_{\pm})$ の計算

命題 (ガウス和の２乗)

$\gamma := \sum_{z \in \mathbb{F}_q^{\times}} \alpha_0(z)\chi_{+}(z)$ とおくと $\gamma^2 = \alpha_0(-1)q$

(注) 以後 $\gamma = \sqrt{\alpha_0(-1)q}$ とかく.

$\Upsilon_\pm(u_\pm)$ の計算

命題 (ガウス和の２乗)

$\gamma := \sum_{z\in\mathbb{F}_q^\times} \alpha_0(z)\chi_+(z)$ とおくと $\gamma^2 = \alpha_0(-1)q$

(注) 以後 $\gamma = \sqrt{\alpha_0(-1)q}$ とかく.

系 ($\Upsilon_+(u_\pm), \Upsilon_-(u_\pm)$ の値)

$\Upsilon_+(u_\pm) = \frac{-1\pm\sqrt{\alpha_0(-1)q}}{2}, \Upsilon_-(u_\pm) = -\frac{1\pm\sqrt{\alpha_0(-1)q}}{2}$

Character Table

$SL_2(\mathbb{F}_q)$ の指標表

Table 1: $G = SL_2(\mathbb{F}_q)$ の指標表

g	$\pm I_2$	$d(a)$ $a \in \mathbb{F}_q^\times \backslash \{\pm 1\}$	$d'(\xi)$ $\xi \in \mu_{q+1} \backslash \{\pm 1\}$	$\pm u_\tau$ $\tau \in \{\pm\}$
1_G	1	1	1	1
$\mathrm{R}(\alpha), \alpha^2 \neq 1$	$(q+1)\alpha(\pm 1)$	$\alpha(a) + \alpha(a^{-1})$	0	$\alpha(\pm 1)$
St_G	q	1	-1	0
$\mathrm{R}_\sigma(\alpha_0), \sigma \in \{\pm\}$	$\frac{(q+1)\alpha_0(\pm 1)}{2}$	$\alpha_0(a)$	0	$\alpha_0(\pm 1)\frac{1+\sigma\tau\sqrt{q\alpha_0(-1)}}{2}$
$\mathrm{R}'(\theta), \theta^2 \neq 1$	$(q-1)\theta(\pm 1)$	0	$-\theta(\xi) - \theta(\xi)^{-1}$	$-\theta(\pm 1)$
$\mathrm{R}'_\sigma(\theta_0), \sigma \in \{\pm\}$	$\frac{(q-1)\theta_0(\pm 1)}{2}$	0	$-\theta_0(\xi)$	$\theta_0(\pm 1)\frac{-1+\sigma\tau\sqrt{q\alpha_0(-1)}}{2}$

$\mathrm{R}'(\theta), \mathrm{R}'_\pm(\theta_0)$ は Deligne–Lusztig 誘導から得られる既約指標.