

5/25 の小テストの解答例

ver. 2023.05.25

担当: 山口航平

kohei.yamaguchi.28 [at] gmail.com

https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~d20003j/lin_alg1.html

問 1. 写像 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

と定義する. このとき以下の設問に答えよ.

(1) [配点:2]. 写像 f は線形写像であることを証明せよ.

解答例 1. (i) 各 $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対して,

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f\left(\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2(x_1 + y_1) + 3(x_2 + y_2) \\ x_1 + y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2y_1 + 3y_2 \\ y_1 \end{pmatrix} = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$$

が成り立つ.

(ii) 各 $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ と各 $c \in \mathbb{R}$ に対して,

$$f(c\mathbf{x}) = f\left(\begin{pmatrix} cx_1 \\ cx_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2(cx_1) + 3(cx_2) \\ cx_1 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = cf(\mathbf{x})$$

が成り立つ. (i), (ii) より写像 f は線形写像である.

(2) [配点:1]. f に対応する行列を求めよ. ($f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ を満たす行列 A を求めよ.)

解答例 2. 標準ベクトル $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対して, f の定義から

$$f(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

任意の $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= f(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2) \\ &= x_1f(\mathbf{e}_1) + x_2f(\mathbf{e}_2) \quad (f \text{ の線形性を用いた.}) \\ &= x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

以上から線形写像 f に対応する行列は $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.