6/1 の小テストの解答

ver. 2023.05.25
担当: 山口航平
kohei.yamaguchi.28 [at] gmail.com
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~d20003j/data_math.html

問 1. 写像 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を

$$f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 3x_1 + x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

と定義する．このとき以下の設問に答えよ．

(1) [配点:2]. f は線形写像であることを証明せよ．

解答 1. (i) 各 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対して,

$$f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = f(\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 3(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) \\ x_1 + y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 + x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3y_1 + y_2 \\ y_1 \end{pmatrix} = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y})$$

が成り立つ．

(ii) 各 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ と各 $c \in \mathbb{R}$ に対して,

$$f(c\boldsymbol{x}) = f(\begin{pmatrix} cx_1 \\ cx_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 3(cx_1) + (cx_2) \\ cx_1 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 3x_1 + x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = cf(\boldsymbol{x})$$

が成り立つ．(i), (ii) より写像 f は線形写像である．

(2) [配点:1]. f に対応する行列を求めよ．($f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ を満たす行列 A を求めよ.)

解答 2. 標準ベクトル $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対して, f の定義から

$$f(\boldsymbol{e}_1) = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f(\boldsymbol{e}_2) = \begin{pmatrix} 3 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

任意の $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) &= f(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2) \\ &= x_1 f(\boldsymbol{e}_1) + x_2 f(\boldsymbol{e}_2) \qquad (f \text{ の線形性を用いた.}) \\ &= x_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

以上から線形写像 f に対応する行列は $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.