

5/25 の小テストの解答例

ver. 2023.05.25

担当: 山口航平

kohei.yamaguchi.28 [at] gmail.com

https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~d20003j/data_math.html

問 1 (配点:3 点 (部分点はありません。)). 全ての自然数 n に対して

$$\sum_{i=1}^n 2^i = 2^{n+1} - 2$$

が成り立つことを数学的帰納法を用いて証明せよ.

解答例 1. n に関する帰納法により示す.

(i) $n = 1$ のとき

$$2^{1+1} - 2 = 2 = \sum_{i=1}^1 2^i$$

となり真.

(ii) $n = k$ のとき, すなわち $\sum_{i=1}^k 2^i = 2^{k+1} - 2$ は真であると仮定する. ここで $n = k + 1$ の場合を考える.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} 2^i &= 2^{k+1} + \sum_{i=1}^k 2^i \\ &= 2^{k+1} + (2^{k+1} - 2) \quad (\text{仮定を用いた.}) \\ &= 2 \cdot 2^{k+1} - 2 \\ &= 2^{k+2} - 2 \end{aligned}$$

となり $n = k + 1$ の場合は真.

(i),(ii) からすべての自然数 n について真である.