Macdonald 多項式と affine Hecke 代数

山口 航平
神戸大学大学院理学研究科数学専攻 (M1)

February 14, 2019

Plan

Macdonald 多項式が現れるところ．例えば…

- 量子群や変形ヴィラソロ代数の表現論
- 幾何学, 組合せ論

talk plan

1. Macdonald 多項式とは何なのか.
2. affine Hecke 代数と Macdonald 多項式の関係 (Macdonald-Cherednik 理論).

Notation

- $\mathbb{K} := \mathbb{Q}(q,t)$, $(q, t :$ パラメータ$)$
- $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$
- $W = \mathfrak{S}_n$, (A_{n-1} 型の Weyl 群)
- $W \curvearrowright \mathbb{K}[x^{\pm 1}]$, $w \cdot f(x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}) = f(x_{w(1)}^{\pm 1}, \ldots, x_{w(n)}^{\pm 1})$
- $\mathbb{K}[x^{\pm 1}]^W := \{f \in \mathbb{K}[x] \mid w \cdot f = f, \forall w \in W\}$
- $\mathbb{K}[x^{\pm 1}]^W = \mathbb{K}[e_1(x), \ldots, e_n(x), e_n(x)^{-1}]$
- $P := \mathbb{Z}^n = \mathbb{Z}\epsilon_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\epsilon_n$
- $P^+ := \{\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in P \mid \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n\} \subset P$
- $\lambda, \mu \in P$ に対して

$$\mu \leq \lambda \Leftrightarrow \ \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_i \leq \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_i, \ \forall i$$

とする．これを<u>ドミナンス順序</u>という．

Probrem

$\mathbb{K}[x^{\pm 1}]^W$ の $\mathbb{K}-$ 基底はどのようなものがあるか?

- $m_\lambda = \sum_{\mu \in W_\lambda} x^\mu, \ (\lambda \in P^+)$: monomial symmetric function
- $s_\lambda = \dfrac{\det(x_j^{\lambda_i + n - i})}{\det(x_j^{n-i})}, (\lambda \in P^+)$: Schur function

$$\begin{aligned} \mathbb{K}[x^{\pm 1}]^W &= \bigoplus_{\lambda \in P^+} \mathbb{K} m_\lambda && (1) \\ &= \bigoplus_{\lambda \in P^+} \mathbb{K} s_\lambda && (2) \end{aligned}$$

2 つを interporate するような $\mathbb{K}[x^{\pm 1}]^W$ の $\mathbb{K}-$ 基底 $\{P_\lambda(x; q, t)\}_{\lambda \in P^+}$ をつくる.

Macdonald's $q-$difference equation

$$D_x^{(r)} = t^{r(n-r)/2} \sum_{I \subset \{1,\ldots,n\}, |I|=r} \prod_{i \in I,\ j \notin I} \frac{tx_i - x_j}{x_i - x_j} \tau_I, \ (r = 0, 1, \ldots, n)$$

- $\tau_i \cdot f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, qx_i, \ldots, x_n)$
- $I = \{i_1, \ldots, i_r\}$ のとき $\tau_I = \tau_{i_1} \cdots \tau_{i_r}$

D_x^r の性質

(1). $D_x^{(r)} \ : \ \mathbb{K}[x^{\pm 1}]^W \longrightarrow \mathbb{K}[x^{\pm 1}]^W$

(2). $[D_x^{(r)}, D_x^{(s)}] = 0, \ (r, s \in \{1, \ldots, n\})$

$D_x^{(0)}(= 1), D_x^{(1)}, \ldots, D_x^{(n)}$ を**Macdonald の $q-$ 差分作用素**という.

Claim 1

$D_x^{(0)}, D_x^{(1)}, \ldots, D_x^{(n)}$ を $\mathbb{K}[x^{\pm 1}]^W$ の中で同時対角化せよ.

定理 [Macdonald]

$\mathbb{K}[x^{\pm 1}]^W$ の $\mathbb{K}-$ 基底 $\{P_\lambda(x;q,t)\}_{\lambda \in P^+}$ であって以下を満たすものが唯一つ存在する.

(1). $P_\lambda(x) = m_\lambda(x) + \sum_{\mu < \lambda} u_{\lambda\mu} m_\mu(x)$. $\quad : u_{\lambda\mu} \in \mathbb{K} = \mathbb{Q}(q,t)$

(2). $D_x^{(r)} P_\lambda(x) = e_r(t^\delta q^\lambda) P_\lambda(x), \delta = (n-1, n-2, \ldots, 1, 0)$

定理の $\{P_\lambda(x;q,t)\}_{\lambda \in P^+}$ を A_{n-1} 型の **(対称)Macdonald 多項式**という.

Macdonald 多項式の基本性質

- 特殊化: $P_\lambda(x;q,t)$ は $t=1$ のとき $m_\lambda(x)$, $t=q$ のとき $s_\lambda(x)$ になる. また $q\to 0$ で **Hall-Littlewood 多項式**, $t=q^\beta, q\to 1$ で **Jack 多項式**になる.
- 直交性: $t=q^k,(k=0,1,2,\dots)$ とし, ローラン多項式

$$w_k(x):=\prod_{1\le i,j\le n,\ i\neq j}\prod_{r=0}^{k-1}(1-q^r x_i/x_j) \tag{3}$$

を考える. $w_k(x)$ を重み函数として $\mathbb{K}[x^{\pm 1}]^W$ 上に内積を以下のように定義する.

$$\langle f,g\rangle_k:=\frac{1}{|W|}\int_{\mathbb{T}^n} f(x^{-1})g(x)w_k(x)\frac{dx_1}{x_1}\cdots\frac{dx_n}{x_n} \tag{4}$$

$\{P_\lambda(x;q,t)\}_{\lambda\in P^+}$ はこの内積に関する直交多項式系をなす.

- 双対性: $x = t^{\delta} = (t^{n-1}, t^{n-2}, \ldots, 1)$ とする．このとき成分数 n 以下の分割 λ, μ に関して次の<u>双対性公式</u>

$$\frac{P_{\lambda}(t^{\delta} q^{\mu})}{P_{\lambda}(t^{\delta})} = \frac{P_{\mu}(t^{\delta} q^{\lambda})}{P_{\mu}(t^{\delta})} \tag{5}$$

が成り立つ．

- Pieri 公式: 基本対称式 $e_r(x)$ と一般の Macdonald 多項式 $P_{\mu}(x)$ との積を Macdonald 多項式 $P_{\lambda}(x)$ の一次結合に書き直す公式

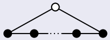
$$e_r(x) P_{\mu}(x) = \sum_{\lambda \supseteq \mu} \psi'_{\lambda/\mu} P_{\lambda}(x) \tag{6}$$

が成り立つ．$|\lambda| = |\mu| + r$ で Young 図形の差集合 $\lambda \backslash \mu$ が垂直断片となるような λ に関する和になる．

affine Hecke 代数との関係

- $\{\alpha_i = \epsilon_i - \epsilon_{i+1}\}_{i=1}^{n-1}$: A_{n-1} 型の simple root.
- $Q := \oplus_{i=1}^{n-1} \mathbb{Z}\alpha_i$: root lattice
- $W = \mathfrak{S}_n = < s_1, \ldots, s_{n-1} >, \quad s_i = (i, i+1)$ (Weyl 群)
- $W^{aff} = \tau^Q \rtimes W = < s_0, s_1, \ldots, s_{n-1} >$ (affine Weyl 群)
- $\widetilde{W} = \tau^P \rtimes W = < s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}, \omega >$ (extended affine Weyl 群)

$\widetilde{W}$ の生成系の関係式

(1). $s_i^2 = 1, \ (i = 0, 1, \ldots, n-1)$ 

(2). $s_i s_j = s_j s_i, \quad \overset{i}{\circ} \ \ \overset{j}{\circ}$

(3). $s_i s_j s_i = s_j s_i s_j, \quad \overset{i}{\circ} - \overset{j}{\circ}$

(4). $\omega s_i = s_{i-1}\omega$, (添字は $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ で考える.)

$\widetilde{W}$ の群環 $\mathbb{K}[\widetilde{W}]$ を Hecke 化したものが affine Hecke 代数.

affine Hecke 代数 $H(\widetilde{W})$ の定義

生成元: $T_0, T_1, \ldots, T_{n-1}, \omega^{\pm 1}$
基本関係式:
(1). $(T_i - t^{1/2})(T_i + t^{-1/2}) = 0, \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1)$
(2). $T_i T_j = T_j T_i, \quad \overset{i}{\circ} \quad \overset{j}{\circ}$
(3). $T_i T_j T_i = T_j T_i T_j, \quad \overset{i}{\circ} - \overset{j}{\circ}$
(4). $\omega T_i = T_{i-1} \omega$ (添字は $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ で考える.)

Goal

affine Hecke 代数から Macdonald の $q-$ 差分作用素を再構築する.

- $\mathscr{D}_{q,x} := \mathbb{K}(x)[\tau^{\pm 1}]$: 有理函数係数の $q-$ 差分作用素環
- $W \curvearrowright \mathscr{D}_{q,x}, \quad (w.P := wPw^{-1}, \ w \in W, P \in \mathscr{D}_{q,x})$
- $\mathscr{D}_{q,x}[W] = \bigoplus_{w \in W} \mathscr{D}_{q,x} w.$ (接合積)
- $\mathscr{D}_{q,x}[W]$ は $\mathbb{K}[x^{\pm 1}][W]$, $\mathbb{K}[\tau^{\pm 1}][W]$ を含んでおり, 両者とも $\mathbb{K}[\widetilde{W}]$ と同型である.

Claim 2

T_i たちを $\mathscr{D}_{q,x}[W]$ の中で実現せよ.

Lusztig 作用素

$T_i := t^{1/2} + t^{-1/2} \frac{1 - t x^{\alpha_i}}{1 - x^{\alpha_i}} (s_i - 1). \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1)$
但し, $x^{\alpha_0} = q x_n / x_1, \quad x^{\alpha_i} = x_i / x_{i+1}, \ (i = 1, 2, \ldots, n-1)$

T_i たちの $\mathscr{D}_{q,x}[W]$ の中での実現

Lusztig 作用素 $\{T_i\}_{i=0}^{n-1}$ と $\omega = s_{n-1} \cdots s_1 \tau_1$ によって

$$H(\widetilde{W}) \hookrightarrow \mathscr{D}_{q,x}[W]$$

が分かる.

Claim 3

$\widetilde{W} = P \rtimes W$ の **lattice part** を $\mathscr{D}_{q,x}[W]$ の中で具体的に実現せよ.

$\tau_i = s_i \cdots s_{n-1}\omega s_1 \cdots s_{i-1}$ と比較しながら考える.

$$
\begin{aligned}
Y_1 &:= T_1 \cdots T_{n-1}\omega \\
Y_2 &:= T_2 T_3 \cdots T_{n-1}\omega T_1^{-1} \\
&\vdots \\
Y_i &:= T_i \cdots T_{n-1}\omega T_1^{-1} \cdots T_{i-1}^{-1} \\
&\vdots \\
Y_n &:= \omega T_1^{-1} \cdots T_{n-1}^{-1}
\end{aligned}
$$

と定義する. これらを $q-$**Dunkl** 作用素という.

定理 [Berustein,Lusztig]

(1). $[Y_i, Y_j] = 0.\ \ (\forall i, j)$

(2). $H(\widetilde{W}) = \mathbb{K}[Y^{\pm 1}] \otimes H(W)$.

(3). $\mathscr{Z}H(\widetilde{W}) = \mathbb{K}[Y^{\pm 1}]^W$. ($\mathscr{Z}H(\widetilde{W})$ は $H(\widetilde{W})$ の中心)

Macdonald の $q-$ 差分作用素の再構成

$$\begin{array}{ccc} L : \mathscr{D}_{q,x}[W] & \longrightarrow & \mathscr{D}_{q,x} \\ \Cup & & \Cup \\ A = \sum_{w \in W} A(x;\tau)w & \longmapsto & L_A = \sum_{w \in W} A(x;\tau) \end{array}$$

$W - inv.$ な函数 $\varphi(x)$ に対して,

$$A\varphi(x) = \sum_{w \in W} A(x;\tau)w\varphi(x) = (\sum_{w \in W} A(x;\tau))\varphi(x) = L_A\varphi(x).$$

つまり A は対称函数に対しては $q-$ 差分作用素として作用する. 任意の元 $f(Y) \in \mathbb{K}[Y^{\pm 1}]^W = \mathscr{Z}H(\widetilde{W})$ に対して L_f は $W - inv.$ な $q-$ 差分作用素になる. したがって, L から

$$\mathbb{K}[Y^{\pm 1}]^W = \mathscr{Z}H(\widetilde{W}) \to \mathscr{D}_{q,x}^W$$

が誘導される.

1. $q-$Dunkl 作用素の基本対称函数 $e_r(Y) \in \mathbb{K}[Y]^W$ の L_{e_r} を考える.
2. Y_i の構成法を追跡すると

$$L_{e_r} = t^{-\frac{r(n-r)}{2}} \sum_{|I|=r} \prod_{i\in I; j\notin I} \frac{tx_i - x_j}{x_i - x_j} \tau_I = t^{-\frac{(n-1)r}{2}} D_x^{(r)}$$

3. $e_1(Y), \ldots, e_n(Y), e_n(Y)^{-1}$ は $\mathbb{K}[Y^{\pm 1}]^W$ の生成系を与えていることから,

$$L : \mathscr{Z}H(\widetilde{W}) = \mathbb{K}[Y^{\pm 1}]^W \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}[D_x^{(1)}, \ldots, D_x^{(n)}, (D_x^{(n)})^{-1}] \subset \mathscr{D}_{q,x}^W$$

が誘導される.