# 整数の分割を数える*

名古屋大学多元数理科学研究科 岡田 聡一†

与えられた正整数をいくつかの正整数の和として表す（和の順序は考えない）表し方を，その正整数の分割という．分割は，対称式をはじめとして数学に現れるさまざまな対象にラベルをつけるのに利用され，数学や物理学の問題を具体的に（組合せ論的に）扱う手段の一つとなっている．また，分割の個数を係数とする多項式やべき級数として得られる関数やそれらの間の関係式は，数学だけでなく数理物理学など幅広い分野で重要な役割を果たしている．

この講義では，ある条件をみたす分割が何通りあるかを数えるという問題を扱う．そして，場合の数を個別に考えるのではなく，その場合の数を係数とする多項式やべき級数（多項式の拡張で形式的に無限和を考えたもの）を考えるという「母関数」のアイデアを説明する．

## 1 分割とガウス多項式[1]

今回の講義では，分割，ヤング図形の概念を導入し，$k$ 以下の正整数を用いた分割で項の数が $l$ 個以下であるようなものの個数の母関数が，二項係数の多項式版（ガウス多項式という）を与えることを証明する．

### 1.1 分割とヤング図形

正整数 $n$ が与えられたとき，$n$ をいくつかの正整数の和として表す表し方（ただし，和の順序は無視する）を $n$ の**分割**（partition）という．$n$ の分割の個数を $p(n)$ と表し，$p(n)$ を**分割数**と呼ぶ．

**例 1.1.** まず，1 の分割は 1 しかないから，$p(1) = 1$ である．次に，2 には

$$2, \quad 1+1$$

の 2 通りの表し方があるから，2 の分割は $2, 1+1$ の 2 個であり，$p(2) = 2$ である．3 の分割は

$$3, \quad 2+1, \quad 1+1+1$$

*これは，2006 年度数学アゴラ秋の継続コースの講義録である．

†この講義録の作成に協力してくれた佐々木 義卓，瀧 真語の両氏に感謝する．

[1] 第 1 回，2006 年 11 月 4 日 15:00 〜 17:00.

の 3 通りあるから，$p(3)=3$ である．ここで，分割では和の順序を無視するので，$2+1$ と $1+2$ は同じ分割を表していることに注意する．4 の分割は

$$4, \quad 3+1, \quad 2+2, \quad 2+1+1, \quad 1+1+1+1$$

の 5 通りあるから，$p(4)=5$ である．

**問 1.2.** 5, 6, 7, 8 の分割をすべて書き上げ，$p(5), p(6), p(7), p(8)$ を求めよ．

**答.** $p(5)=7, p(6)=11, p(7)=15, p(8)=22$ である．

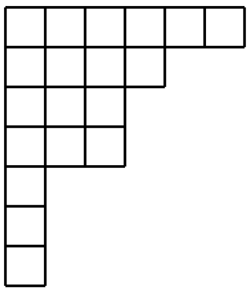
分割を表すときは，上の例のように，項を大きい順に並べて書くことにする．例えば，8 の分割 $4+2+1+1$ は，$4+1+2+1, 1+1+2+4$ などさまざまな表し方があるが，以下では $4+2+1+1$ という表示を採用する．こうすることで分割の表示がただ 1 通りに定まる．

**約束.** 0 の分割が 1 通りある（つまり，$p(0)=1$ である）と約束する．そして，0 の分割を $\emptyset$ と表すことにし，$\emptyset$ の項の数は 0 であるとする．

分割は，正方形を並べることによって視覚的に（2 次元的に）表示することができる．例えば，19 の分割

$$6+4+3+3+1+1+1$$

に対して，1 辺の長さが 1 である正方形のタイル 19 枚を，1 段目に 6 枚，2 段目に 4 枚，3 段目に 3 枚，$\cdots$，6 段目に 1 枚，7 段目に 1 枚と，左端を揃えて並べてできる図形



を，分割 $6+4+3+3+1+1+1$ の**ヤング**[2]**図形**（Young diagram）あるいは**フェラーズ**[3]**図形**（Ferrers diagram）という．一般に，$n$ の分割

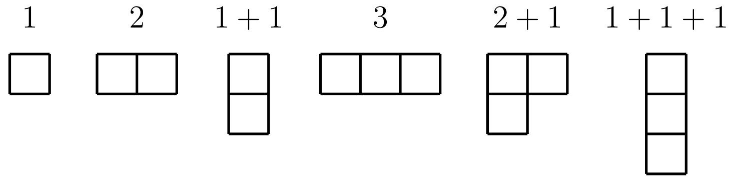
$$k_1+k_2+\cdots+k_r \quad (k_1 \geqq k_2 \geqq \cdots \geqq k_r)$$

に対して，$n$ 枚のタイルを 1 段目に $k_1$ 枚，2 段目に $k_2$ 枚，$\cdots$，$r$ 段目に $k_r$ 枚と左端を揃えて並べてできる図形を，分割 $k_1+k_2+\cdots+k_r$ のヤング図形という．

[2]Alfred Young，1873 年 4 月 16 日 〜 1940 年 12 月 15 日．イギリスの数学者．牧師でもあった．ヤング図形，ヤング盤の概念を群論（表現論）の研究に活用した．

[3]Norman Macleod Ferrers，1829 年 8 月 11 日 〜 1903 年 1 月 31 日．イギリスの数学者．ケンブリッジ大学の副学長（事実上の最高責任者）を務めた．分割の共役（ヤング図形の転置）の概念を発見した．

**例 1.3.** 1, 2, 3 の分割のヤング図形はそれぞれ次のようになる：




タイルを上端と左端を揃えて並べた図形で，どのタイルを考えてもそこから上端，左端までタイルがつまっているものがあれば，1 段目，2 段目，$\cdots$ にあるタイルの枚数を数えることによって，分割が定まる．このようにして，分割とそのヤング図形は 1 対 1 に対応している．また，0 の分割 $\emptyset$ のヤング図形は，タイルを 1 枚も置かない状態である．

## 1.2 母関数

今回の講義では，次の問題を考える．

**問題 1.4.** $n$, $k$, $l$ を正整数とするとき，$k$ 以下の正整数を用いた $n$ の分割で，項の数が $l$ 個以下であるようなものはいくつあるか？

求める分割の個数（つまり，$k$ 以下の正整数を用いた $n$ の分割で項の数が $l$ 個以下であるようなものの個数）を $a_n(k,l)$ と表すことにする．文脈から $k$, $l$ がわかる場合には，$k$, $l$ を省略して単に $a_n$ と表すこともある．また，$a_0(k,l) = 1$ と約束する．さらに，$k = 0$ あるいは $l = 0$ のときも考え，

$$\begin{aligned} a_0(k,0) = 1, \quad a_n(k,0) = 0 \quad (n > 0), \\ a_0(0,l) = 1, \quad a_n(0,l) = 0 \quad (n > 0) \end{aligned} \tag{1}$$

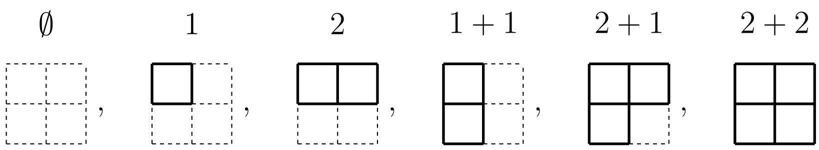
と約束しておくと，都合がよい．

ヤング図形の言葉を用いると，問題 1.4 は

> 横幅が $k$ 以下であり，段数が $l$ 以下であるような（つまり，縦の長さが $l$，横の長さが $k$ である長方形に含まれるような）$n$ 枚のタイルを用いたヤング図形はいくつあるか？

と言い換えることができる．

**例 1.5.** $k = l = 2$ のとき，問題の条件をみたす分割は



の 6 個である．よって，

$$a_0(2,2)=1,\quad a_1(2,2)=1,\quad a_2(2,2)=2,\quad a_3(2,2)=1,\quad a_4(2,2)=1$$

であり，$n \geqq 5$ のときは $a_n(2,2)=0$ である．

個数 $a_n(k,l)$ を個別に求めるのではなく，$(kl+1)$ 個の数

$$a_0(k,l),\ a_1(k,l),\ a_2(k,l),\ \cdots,\ a_{kl}(k,l)$$

をまとめて扱い，これらを係数とする多項式

$$F(k,l;t)=\sum_{n=0}^{kl} a_n(k,l)t^n = a_0+a_1t+a_2t^2+\cdots+a_{kl}t^{kl} \tag{2}$$

を考えることにする．ここで，$n>kl$ ならば $a_n(k,l)=0$ であることに注意する．この多項式 $F(k,l;t)$ を数列 $\{a_n(k,l)\}$ の**母関数**（generating function）という．$a_n(k,l)$ を $n,k,l$ を用いた式で表現することは難しいが，あと（定理 1.12）で見るように，多項式 $F(k,l;t)$ は簡単に表すことができる．

**例 1.6.** 上の約束 (1) から，$k=0$ または $l=0$ の場合は，

$$F(0,l;t)=1,\quad F(k,0;t)=1 \tag{3}$$

である．

$k=l=2$ のとき，例 1.5 より，

$$F(2,2;t)=1+t+2t^2+t^3+t^4=(1+t+t^2)(1+t^2)$$

である．

**問 1.7.** $F(1,l;t)$, $F(k,1;t)$, $F(3,2;t)$ を求めよ．

**答.** $k=1$ のとき，$a_n(1,l)=1\ (0\leqq n\leqq l)$ であり，$a_n(1,l)=0\ (n>l)$ だから，

$$F(1,l;t)=1+t+\cdots+t^l=\sum_{n=1}^{l} t^n$$

である．$l=1$ のときも同様に，$a_n(k,1)=1\ (0\leqq n\leqq k)$ であり，$a_n(k,1)=0\ (n>k)$ だから，

$$F(k,1;t)=1+t+\cdots+t^k=\sum_{n=1}^{k} t^n$$

である．また，$k=3, l=2$ のときは，条件をみたす分割をすべて書き上げることにより，

$$\begin{aligned}F(3,2;t)&=1+t+2t^2+2t^3+2t^4+t^5+t^6\\&=(1+t+t^2+t^3+t^4)(1+t^2)\end{aligned}$$

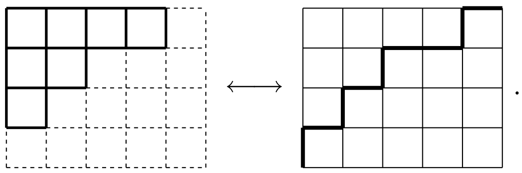
となることがわかる．

## 1.3 ガウス多項式（$t$-二項係数）

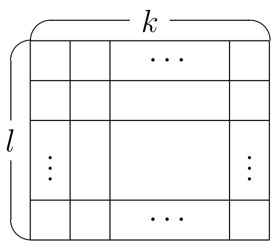
まず，$t=1$ を代入した

$$F(k,l;1)=\sum_{n=0}^{kl}a_n(k,l)=a_0+a_1+\cdots+a_{kl}$$

を考える．これは，縦 $l$，横 $k$ の長方形に含まれるヤング図形の総数に等しい．ところが，このようなヤング図形と，そのヤング図形の縁に沿った道（長方形の左下隅から右上隅に至る）を考えると，これらは 1 対 1 に対応している．例えば，$k=5, l=4$ のとき，分割 $4+2+1$ のヤング図形とそれに対応する道は次のようになる：



よって，$F(k,l;1)$ は，下図のような縦 $l$, 横 $k$ の長方形状の街路で，左下隅から右上隅に至る最短経路の総数に等しいことがわかる．




従って，

$$F(k,l;1)=\binom{k+l}{l} \tag{4}$$

となる．ここで，$\binom{k+l}{l}$ は二項係数 ${}_{k+l}C_l$ であり，以下では二項係数 ${}_nC_m$ を $\binom{n}{m}$ と表すことにする．

二項係数が

$$\binom{n}{m}=\frac{n!}{m!(n-m)!} \tag{5}$$

と表されることに着目して，その多項式版を次のように定義しよう．正整数 $i$ の代わりに

$$[i]_t=\frac{1-t^i}{1-t}=1+t+t^2+\cdots+t^{i-1}$$

を考える．$i=1$ のときは $[1]_t=1$ である．そして，$0<m<n$ のとき，

$$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_t=\frac{[n]_t\,[n-1]_t\,\cdots\,[1]_t}{[m]_t\,[m-1]_t\,\cdots\,[1]_t\,[n-m]_t\,[n-m-1]_t\,\cdots\,[1]_t} \tag{6}$$

と定義し，$m=0$ または $m=n$ のときは，

$$\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}_t = \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix}_t = 1 \tag{7}$$

と定める．これを**ガウス**[4]**多項式**（Gaussian polynomial）あるいは***t*-二項係数**（*t*-binominal coefficient）という．（この定義からは明らかではないが，$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_t$ は $t$ に関する多項式となる．系 1.11 を見よ．）$t=1$ を代入すると，$[i]_1 = i$ となるから，(5) 式と (6) 式を比較すると，

$$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_1 = \binom{n}{m} \tag{8}$$

である．

**例 1.8.** $m=1$ または $m=n-1$ のときは，

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}_t = \begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix}_t &= \frac{[n]_t\,[n-1]_t\,[n-2]_t\,\cdots\,[2]_t\,[1]_t}{[1]_t\,[n-1]_t\,[n-2]_t\,\cdots\,[2]_t\,[1]_t} \\ &= \frac{[n]_t}{[1]_t} = 1+t+t^2+\cdots+t^{n-1} \end{aligned}$$

となる．また，

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}_t = \frac{[4]_t\,[3]_t\,[2]_t\,[1]_t}{[2]_t\,[1]_t\,[2]_t\,[1]_t} = \frac{[4]_t\,[3]_t}{[2]_t\,[1]_t} = \frac{(1-t^4)(1-t^3)}{(1-t^2)(1-t)} = (1+t+t^2)(1+t^2)$$

である．

**注意 1.9.** $n$ が $m$ で割り切れるならば，$[n]_t$ は $[m]_t$ で割り切れる．しかし，このとき一般には $[n]_t/[m]_t$ と $[n/m]_t$ は異なる．例えば，

$$\frac{[4]_t}{[2]_t} = 1+t^2, \quad \begin{bmatrix} \frac{4}{2} \end{bmatrix}_t = [2]_t = 1+t$$

である．

**補題 1.10.** $0 < m \leqq n$ のとき，

$$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_t = \begin{bmatrix} n-1 \\ m-1 \end{bmatrix}_t + t^m \begin{bmatrix} n-1 \\ m \end{bmatrix}_t, \tag{9}$$

$$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_t = t^{n-m} \begin{bmatrix} n-1 \\ m-1 \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} n-1 \\ m \end{bmatrix}_t. \tag{10}$$

[4]Johann Carl Friedrich Gauss, 1777 年 4 月 30 日 〜 1855 年 2 月 23 日．ドイツの数学者・物理学者．彼の研究は，整数論，解析学，幾何学，磁気学，天文学など幅広い分野にわたっており，現代数学に大きな影響を与えている．ガウスがガウス多項式を考えた動機は，ガウス和 $\sum_{j=0}^{k-1}\left(e^{2\pi\sqrt{-1}/k}\right)^{j^2}$ の計算であった．

この補題の等式 (9), (10) において $t=1$ を代入すると，(8) 式により，二項係数の関係式

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m} \tag{11}$$

が得られる．

**証明**. 証明を見やすくするために，

$$[k]_t! = [k]_t\,[k-1]_t \cdots [1]_t$$

と表すことにする．すると，$[k+1]_t! = [k+1]_t \cdot [k]_t!$ となる．(9) 式の左辺を変形していくと，

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} n-1 \\ m-1 \end{bmatrix}_t + t^m \begin{bmatrix} n-1 \\ m \end{bmatrix}_t &= \frac{[n-1]_t!}{[m-1]_t![n-m]_t!} + t^m \frac{[n-1]_t!}{[m]_t![n-m-1]_t!} \\
&= \frac{[n-1]_t!}{[m]_t![n-m]_t!} \cdot \{[m]_t + t^m[n-m]_t\} \\
&= \frac{[n-1]_t!}{[m]_t![n-m]_t!} \cdot \frac{(1-t^m)+t^m(1-t^{n-m})}{1-t} \\
&= \frac{[n-1]_t!}{[m]_t![n-m]_t!} \cdot \frac{1-t^n}{1-t} \\
&= \frac{[n-1]_t!}{[m]_t![n-m]_t!} \cdot [n]_t \\
&= \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_t
\end{aligned}$$

となる．(10) 式についても同様に証明できる． □

この補題 1.10 から次の系が証明できる．

**系 1.11.** $\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_t$ は $t$ に関する多項式である．

**証明**. $n$ に関する数学的帰納法で証明する．まず，$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}_t = 1$ は多項式であり，$n=0$ のとき系の主張が成り立つ．

次に，$n \geqq 1$ とし，$\begin{bmatrix} n-1 \\ 0 \end{bmatrix}_t, \begin{bmatrix} n-1 \\ 1 \end{bmatrix}_t, \cdots, \begin{bmatrix} n-1 \\ n-1 \end{bmatrix}_t$ がすべて多項式であるとすると，$1 \leqq m \leqq n-1$ のとき，補題 1.10 の (9) 式より，$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_t = \begin{bmatrix} n-1 \\ m-1 \end{bmatrix}_t + t^m \begin{bmatrix} n-1 \\ m \end{bmatrix}_t$ も多項式となる．また，(7) 式より，$\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}_t = \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix}_t = 1$ も多項式である．従って，帰納法により，すべての $n, m$ $(0 \leqq m \leqq n)$ に対して，$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_t$ が $t$ の多項式であることがわかる． □

## 1.4　主定理

ガウス多項式を用いると，問題 1.4 に次のような形で解答を与えることができる．

**定理 1.12.** 非負整数 $k, l$ に対して，

$$F(k,l;t) = \begin{bmatrix} k+l \\ l \end{bmatrix}_t \tag{12}$$

が成り立つ．つまり，$k$ 以下の正整数を用いた $n$ の分割で，項の数が $l$ 個以下であるようなものの個数 $a_n(k,l)$ は，ガウス多項式 $\begin{bmatrix} k+l \\ l \end{bmatrix}_t$ における $t^n$ の係数に等しい．

**証明.** $k=0$ または $l=0$ のときは，(3) 式と (7) 式より，

$$F(0,k;t) = 1 = \begin{bmatrix} k \\ 0 \end{bmatrix}_t, \quad F(l,0;t) = 1 = \begin{bmatrix} l \\ l \end{bmatrix}_t$$

となるから，定理の主張が成り立つ．そこで，$k>0, l>0$ とし，$k+l$ に関する数学的帰納法によって，(12) 式を証明する．$k=l=1$ のときは，

$$F(1,1;t) = 1+t, \quad \begin{bmatrix} 1+1 \\ 1 \end{bmatrix}_t = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}_t = 1+t$$

であり，(12) 式が成り立つ．

次に，$k+l>1$ のときを考える．$k=1$ または $l=1$ のときは，問 1.7，例 1.8 より

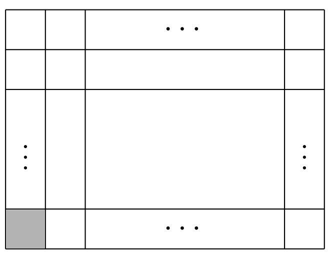
$$F(1,l;t) = 1+t+t^2+\cdots+t^l = \begin{bmatrix} 1+l \\ l \end{bmatrix}_t,$$
$$F(k,1;t) = 1+t+t^2+\cdots+t^k = \begin{bmatrix} k+1 \\ 1 \end{bmatrix}_t$$

であり，(12) 式が成り立つ．

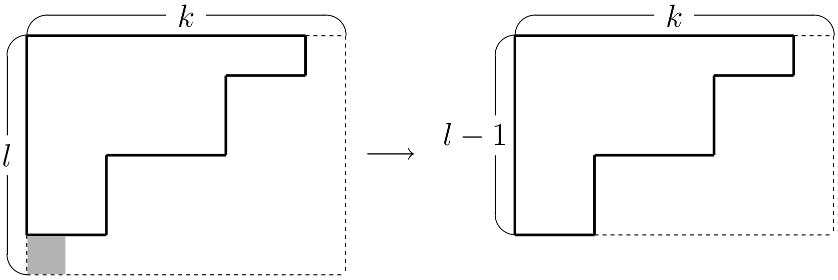
さて，$k>1, l>1$ の場合を考えるために，

$$F(k,l;t) = F(k,l-1;t) + t^l F(k-1,l;t) \tag{13}$$

が成り立つことを示そう．そのために，縦 $l$，横 $k$ の長方形の左下隅（下図の影をつけた位置）にヤング図形のタイルが置かれているかどうかで場合を分けて考える．



- 左下隅にヤング図形のタイルがない場合：このとき，長方形の最下段にはタイルが存在しないので，このようなヤング図形は縦 $l-1$，横 $k$ の長方形に含まれる．

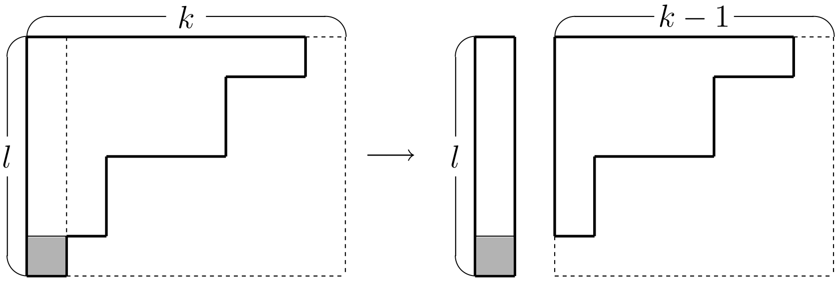



よって，縦 $l$，横 $k$ の長方形に含まれる $n$ 枚のタイルからなるヤング図形で，長方形の左下隅にタイルがないものの総数は

$$a_n(k, l-1)$$

である．

- 左下隅にヤング図形のタイルがある場合：このとき，長方形の左端の列にはタイルが敷きつめられおり，残りの部分は縦 $l$，横 $k-1$ の長方形に含まれるヤング図形となる．




よって，縦 $l$，横 $k$ の長方形に含まれる $n$ 枚のタイルからなるヤング図形で，長方形の左下隅にタイルがあるものの総数は

$$a_{n-l}(k-1, l)$$

である．

従って，この 2 つの場合をまとめると，

$$a_n(k,l) = a_n(k, l-1) + a_{n-l}(k-1, l)$$

となることがわかる．（ただし，$n > k(l-1)$ のときは $a_n(k, l-1) = 0$ であり，$m < 0$ のときは $a_m(k-1, l) = 0$ であると考える．）よって，

$$F(k, l; t) = \sum_{n=0}^{kl} a_n(k,l) t^n$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{kl} \left( a_n(k, l-1) + a_{n-l}(k-1, l) \right) t^n \\
&= \sum_{n=0}^{k(l-1)} a_n(k, l-1) t^n + \sum_{n=l}^{kl} t^l \cdot a_{n-l}(k-1, l) t^{n-l} \\
&= \sum_{n=0}^{k(l-1)} a_n(k, l-1) t^n + t^l \sum_{m=0}^{(k-1)l} a_m(k-1, l) t^m \\
&= F(k, l-1; t) + t^l F(k-1, l; t)
\end{aligned}
$$

となるから，(13) 式が示された．

この (13) 式と補題 1.10 を用いて，定理の証明を完成させよう．(13) 式より

$$F(k, l; t) = F(k, l-1; t) + t^l F(k-1, l; t)$$

であるが，帰納法の仮定より

$$F(k, l-1; t) = \begin{bmatrix} k + (l-1) \\ l-1 \end{bmatrix}_t, \quad F(k-1, l; t) = \begin{bmatrix} (k-1) + l \\ l \end{bmatrix}_t$$

が成り立つから，

$$F(k, l; t) = \begin{bmatrix} k + l - 1 \\ l - 1 \end{bmatrix}_t + t^l \begin{bmatrix} k + l - 1 \\ l \end{bmatrix}_t .$$

ここで，補題 1.10 の (9) 式を用いると，

$$F(k, l; t) = \begin{bmatrix} k + l \\ l \end{bmatrix}_t$$

となり，証明が完成する． □

**問 1.13.** $k = l = 3$ のとき，ヤング図形の対応を具体的に書くことにより，(13) 式が成り立つことを確かめよ．

# 2 ガウス多項式の応用と $t$-二項定理[5]

今回の講義では，前回の講義で求めた母関数を利用して，$k$ 以下の正整数を用いた偶数の分割で項の数が $l$ 個以下であるようなものの個数を求める．また，二項定理のガウス多項式版を説明する．

[5]第 2 回，2006 年 11 月 11 日 15:00 〜 17:00.

## 2.1 今回の問題

今回は次の問題[6]を考える．

**問題 2.1.** $k$ 以下の正整数を用いた偶数の分割で項の数が $l$ 以下であるようなものはいくつあるか？

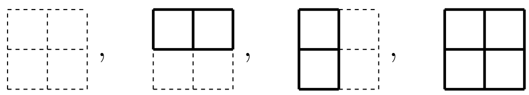
前回と同様，$k$ 以下の正整数を用いた $n$ の分割で項の数が $l$ 以下であるようなものの個数を $a_n(k,l)$ と表すことにすると，問題は,

$$a_0(k,l) + a_2(k,l) + a_4(k,l) + \cdots \text{ を求めよ,}$$

と言い換えることができる．

**例 2.2.** $k = l = 2$ のときは，問題の条件をみたす分割は

$\emptyset$　　　$2$　　　$1+1$　　　$2+2$



の 4 個である．

数列 $a_n(k,l)$ の母関数

$$F(k,l;t) = \sum_{n=0}^{kl} a_n(k,l)t^n = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + a_4t^4 + \cdots + a_{kl}t^{kl}$$

を利用して考える．$t = 1$ を代入すると,

$$F(k,l;1) = \sum_{n=0}^{kl} a_n(k,l) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots$$

であり，$t = -1$ を代入すると,

$$F(k,l;-1) = \sum_{n=0}^{kl} (-1)^n a_n(k,l) = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \cdots$$

となる．よって,

$$\frac{1}{2}((F(k,l;1) + F(k,l;-1)) = a_0 + a_2 + a_4 + a_6 + \cdots \tag{14}$$

となる．この式を得るための鍵は,

$$\frac{1+(-1)^n}{2} = \begin{cases} 1 & (n \text{ が偶数のとき}) \\ 0 & (n \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

であることに注意しておく．

[6] この問題は，田川 裕之「Hook length formula と lattice path method」（筑波大学での集中講義）から採った.

## 2.2　ガウス多項式の特殊値

前回証明したように（定理 1.12 を見よ），正整数 $k, l$ に対して，$F(k,l;t)$ はガウス多項式を用いて

$$F(k,l;t) = \begin{bmatrix} k+l \\ l \end{bmatrix}_t$$

と表された．よって，(14) 式により，問題 2.1 を解くためには，ガウス多項式に $t=-1$ を代入した $\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_{-1}$ を考える必要がある．

二項係数 $\binom{n}{m}$ を並べると，次のような**パスカル**[7]**の三角形**ができる：

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}$$

この三角形の一部

$$\begin{array}{ccc}
\binom{n-1}{m-1} & & \binom{n}{m-1} \\
 & \binom{n}{m} &
\end{array}$$

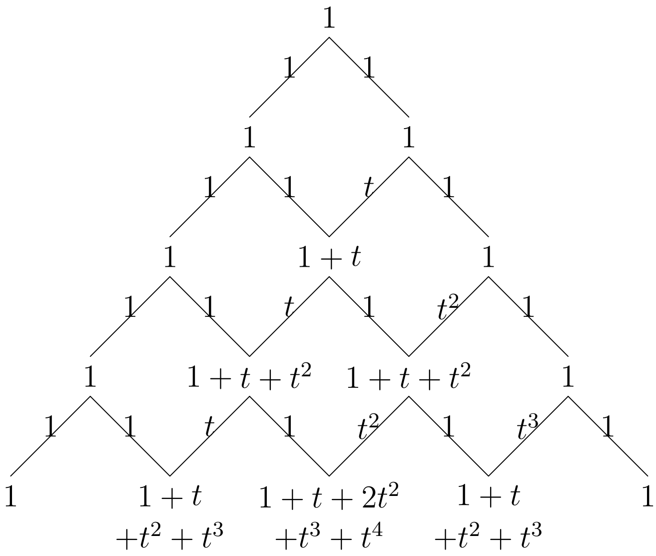
は，二項係数の関係式（(11) 式）

$$\binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m} = \binom{n}{m}$$

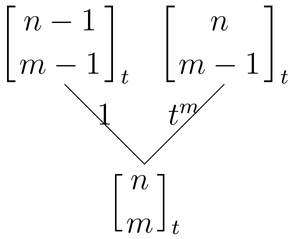
が成り立つことを表している．同様に，補題 1.10 から，ガウス多項式 $\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_t$ を並

[7]Blaise Pascal，1623 年 6 月 19 日 〜 1662 年 8 月 19 日．フランスの哲学者・数学者・物理学者．確率論の基礎を築いた．

べると，次のようなパスカルの三角形のガウス多項式版が得られる：




今度の三角形の一部



は，ガウス多項式の関係式（補題 1.10 の (9) 式）

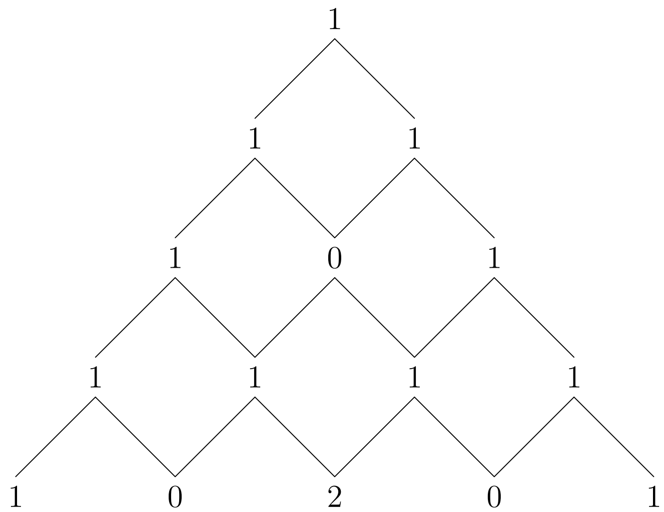
$$\begin{bmatrix} n-1 \\ m-1 \end{bmatrix}_t + t^m \begin{bmatrix} n-1 \\ m \end{bmatrix}_t = \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_t$$

が成り立つことを表している．

補題 1.10 の (9) 式において $t=-1$ を代入すると，

$$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_{-1} = \begin{bmatrix} n-1 \\ m-1 \end{bmatrix}_{-1} + (-1)^m \begin{bmatrix} n-1 \\ m \end{bmatrix}_{-1} \tag{15}$$

となり，$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_{-1}$ を並べると，次のパスカルの三角形ができる：




**問 2.3.** このパスカルの三角形の続きを書き，$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_{-1}$ を予想せよ．

実は，次が成り立つ．

**補題 2.4.** $0 \leqq m \leqq n$, $0 \leqq l < n$ のとき，

$$\begin{bmatrix} 2n \\ 2m \end{bmatrix}_{-1} = \binom{n}{m}, \quad \begin{bmatrix} 2n \\ 2l+1 \end{bmatrix}_{-1} = 0$$

であり，$0 \leqq m \leqq n$ のとき，

$$\begin{bmatrix} 2n+1 \\ 2m \end{bmatrix}_{-1} = \begin{bmatrix} 2n+1 \\ 2m+1 \end{bmatrix}_{-1} = \binom{n}{m}$$

である．

**証明．** $n$ に関する数学的帰納法で証明する．まず，$n = 0$ のときは，$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}_t = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_t = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}_t = 1$ だから，

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{-1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{-1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{-1} = 1 = \binom{0}{0}$$

となり，主張が成り立つ．次に，$n > 0$ とすると，(15) 式より

$$\begin{bmatrix} 2n \\ 2m \end{bmatrix}_{-1} = \begin{bmatrix} 2n-1 \\ 2m-1 \end{bmatrix}_{-1} + (-1)^{2m} \begin{bmatrix} 2n-1 \\ 2m \end{bmatrix}_{-1},$$

$$\begin{bmatrix} 2n \\ 2m+1 \end{bmatrix}_{-1} = \begin{bmatrix} 2n-1 \\ 2m \end{bmatrix}_{-1} + (-1)^{2m+1} \begin{bmatrix} 2n-1 \\ 2m+1 \end{bmatrix}_{-1}$$

であるが，帰納法の仮定より

$$\begin{bmatrix} 2n-1 \\ 2m-1 \end{bmatrix}_{-1} = \binom{n-1}{m-1}, \quad \begin{bmatrix} 2n-1 \\ 2m \end{bmatrix}_{-1} = \begin{bmatrix} 2n-1 \\ 2m+1 \end{bmatrix}_{-1} = \binom{n-1}{m}$$

だから，

$$\begin{bmatrix} 2n \\ 2m \end{bmatrix}_{-1} = \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m} = \binom{n}{m},$$
$$\begin{bmatrix} 2n \\ 2m+1 \end{bmatrix}_{-1} = \binom{n-1}{m} - \binom{n-1}{m} = 0.$$

さらに，再び (15) 式より

$$\begin{bmatrix} 2n+1 \\ 2m \end{bmatrix}_{-1} = \begin{bmatrix} 2n \\ 2m-1 \end{bmatrix}_{-1} + (-1)^{2m} \begin{bmatrix} 2n \\ 2m \end{bmatrix}_{-1},$$
$$\begin{bmatrix} 2n+1 \\ 2m+1 \end{bmatrix}_{-1} = \begin{bmatrix} 2n \\ 2m \end{bmatrix}_{-1} + (-1)^{2m+1} \begin{bmatrix} 2n \\ 2m+1 \end{bmatrix}_{-1}$$

であるが，上で示したことより

$$\begin{bmatrix} 2n \\ 2m-1 \end{bmatrix}_{-1} = 0, \quad \begin{bmatrix} 2n \\ 2m \end{bmatrix}_{-1} = \binom{n}{m}, \quad \begin{bmatrix} 2n \\ 2m+1 \end{bmatrix}_{-1} = 0$$

だから，

$$\begin{bmatrix} 2n+1 \\ 2m \end{bmatrix}_{-1} = 0 + \binom{n}{m} = \binom{n}{m}, \quad \begin{bmatrix} 2n+1 \\ 2m+1 \end{bmatrix}_{-1} = \binom{n}{m} + 0 = \binom{n}{m}$$

となる． □

従って，(14) 式と定理 1.12，補題 2.4 をまとめると，問題 2.1 の解答として次の定理が得られる．

**定理 2.5.** $k$ 以下の正整数を用いた偶数の分割で項の数が $l$ 以下であるようなものの個数は，

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\left\{\dbinom{k+l}{l} + \dbinom{(k+l)/2}{l/2}\right\} & (k,\, l \text{ がともに偶数のとき}) \\ \dfrac{1}{2}\left\{\dbinom{k+l}{l} + \dbinom{(k+l-1)/2}{(l-1)/2}\right\} & (k \text{ が偶数，} l \text{ が奇数のとき}) \\ \dfrac{1}{2}\left\{\dbinom{k+l}{l} + \dbinom{(k+l-1)/2}{l/2}\right\} & (k \text{ が奇数，} l \text{ が偶数のとき}) \\ \dfrac{1}{2}\dbinom{k+l}{l} & (k,\, l \text{ がともに奇数のとき}) \end{cases}$$

で与えられる．

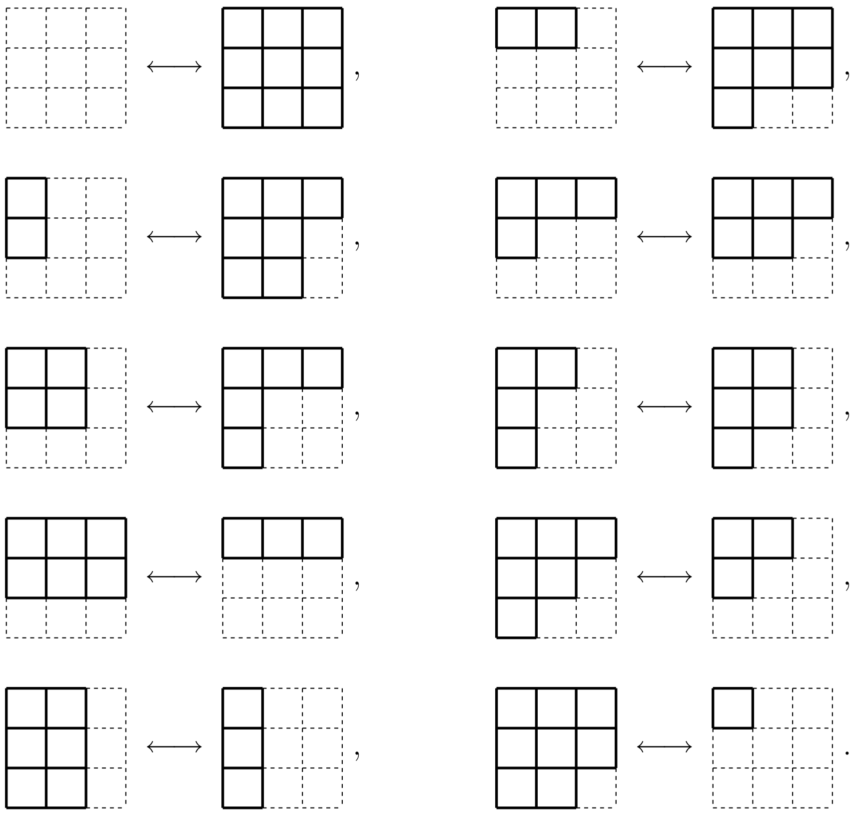
同様の考え方で，$k$ 以下の正整数を用いた 3 の倍数の分割で項の数が $l$ 以下であるようなものの個数を求めることができる．(レポート課題：問題 3 を見よ．)

**注意 2.6.** 上の定理 2.5 から，$k, l$ がともに奇数であるとき，

$k$ 以下の正整数を用いた偶数の分割で項の数が $l$ 以下のものの個数
　　$= k$ 以下の正整数を用いた奇数の分割で項の数が $l$ 以下のものの個数

となることがわかる．この事実は，上のような議論によらなくても，ヤング図形を考えることによって次のように導くこともできる．

縦 $l$, 横 $k$ の長方形に含まれるヤング図形に対して，その残りの部分を $180°$ 回転させたものは再び，縦 $l$, 横 $k$ の長方形に含まれるヤング図形となる．ここで，$kl$ が奇数であることに注意すると，この対応は，偶数枚のタイルからなるヤング図形と，奇数枚のタイルからなるヤング図形の間の 1 対 1 対応を与えていることがわかる．例えば，$k = l = 3$ のときは，次のような対応である：



## 2.3 $t$-二項定理（二項定理のガウス多項式版）

二項係数については，次の二項定理が成り立っている：

$$(1+z)^n = \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} z^l \tag{16}$$

$$= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} z + \binom{n}{2} z^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} z^{n-1} + \binom{n}{n} z^n.$$

ガウス多項式については，次の形の $t$-二項定理が成り立つ．定理を簡潔に述べるために，$c_1, c_2, \cdots, c_n$ の積を

$$\prod_{i=1}^{n} c_i = c_1 \times c_2 \times \cdots \times c_n$$

と表す[8]ことにする．

**定理 2.7.**

$$\prod_{i=1}^{n} (1 + t^i z) = \sum_{l=0}^{n} t^{l(l+1)/2} \begin{bmatrix} n \\ l \end{bmatrix}_t z^l. \tag{17}$$

つまり，

$$\begin{aligned}
&(1 + tz)(1 + t^2 z) \cdots (1 + t^n z) \\
&\qquad = \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}_t + t \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}_t z + t^3 \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix}_t z^2 + \cdots + t^{n(n+1)/2} \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix}_t z^n.
\end{aligned}$$

この $t$-二項定理 (17) において $t = 1$ を代入すると，(8) 式により，通常の二項定理 (16) が得られる．

**例 2.8.** $n = 1$ のときは $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_t = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}_t = 1$ だから，(17) 式が成り立つ．$n = 2$ のときは,

$$\begin{aligned}
(1 + tz)(1 + t^2 z) &= 1 + (t + t^2) z + t^3 z^2 \\
&= 1 + t(1 + t) z + t^3 z^2
\end{aligned}$$

であるが，$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}_t = 1$, $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}_t = 1 + t$, $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}_t = 1$ だから，(17) 式が成り立つ．

**問 2.9.** $n = 3$, 4, 5 のとき，左辺を展開することにより，(17) 式が成り立つことを確かめよ．

ここでは，定理 2.7 に対して，2 通りの証明（証明 1：代数的な証明と証明 2：組合せ論的な証明）を与える．

**証明 1.** $n$ に関する数学的帰納法で証明する．$n = 1$ のときは，例 2.8 で見たように，(17) 式が成り立つ．

---

[8] $\prod$ は，積（product）の頭文字 P に対応するギリシア文字（$\pi$ の大文字）である．一方，$\sum$ は，和（sum）の頭文字 S に対応するギリシア文字である．

$n > 1$ とし，

$$\prod_{i=1}^{n-1}(1+t^i z) = \sum_{k=0}^{n-1} t^{k(k+1)/2} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_t z^k$$

が成り立つと仮定する．両辺に $1+t^n z$ を掛けると，

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{n}(1+t^i z) &= \prod_{i=1}^{n-1}(1+t^i z)\cdot(1+t^n z) \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n-1} t^{k(k+1)/2} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_t z^k\right)\cdot(1+t^n z) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} t^{k(k+1)/2} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_t z^k + \sum_{k=0}^{n-1} t^{k(k+1)/2+n} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_t z^{k+1}
\end{aligned}$$

となる．ここで，右辺における $z^l$ の係数を調べる．

- $l=0$ のとき：第 1 項の $k=0$ の項のみが寄与するから，$z^0$ の係数（つまり，定数項）は

  $$\begin{bmatrix} n-1 \\ 0 \end{bmatrix}_t = 1 = \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}_t$$

  である．
- $l=n$ のとき：第 2 項の $k=n-1$ の項のみが寄与するから，$z^n$ の係数は，

  $$t^{n(n-1)/2+n} \begin{bmatrix} n-1 \\ n-1 \end{bmatrix}_t = t^{n(n+1)/2} = t^{n(n+1)/2} \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix}_t$$

  である．
- $1 \le l \le n-1$ のとき：第 1 項の $k=l$ の項と第 2 項の $k=l-1$ の項が寄与するから，$z^l$ の係数は，

  $$t^{l(l+1)/2} \begin{bmatrix} n-1 \\ l \end{bmatrix}_t + t^{l(l-1)/2+n} \begin{bmatrix} n-1 \\ l-1 \end{bmatrix}_t = t^{l(l+1)/2} \left( \begin{bmatrix} n-1 \\ l \end{bmatrix}_t + t^{n-l} \begin{bmatrix} n-1 \\ l-1 \end{bmatrix}_t \right)$$

  である．ここで，補題 1.10 の (10) 式を用いると，この係数は

  $$t^{l(l+1)/2} \begin{bmatrix} n \\ l \end{bmatrix}_t$$

  に等しいことがわかる．

以上から，

$$\prod_{i=1}^{n}(1+t^i z) = \sum_{l=0}^{n} t^{l(l+1)/2} \begin{bmatrix} n \\ l \end{bmatrix}_t z^l$$

となり，(17) 式が成り立つ． □

次に，定理 1.12 に基づいた組合せ論的な別証明を与える．

**証明 2.** 定理 1.12 から

$$\begin{bmatrix} n \\ l \end{bmatrix}_t = F(n-l, l; t)$$

と表されるから，

$$\prod_{i=1}^{n}(1+t^i z) = \sum_{l=0}^{n} t^{l(l+1)/2} F(n-l, l; t) z^l \tag{18}$$

が成り立つことを示せばよい．そのために，(18) 式の左辺を展開したときに現れる各項に，縦 $n-l$，横 $l$ の長方形に含まれるヤング図形を対応させる．

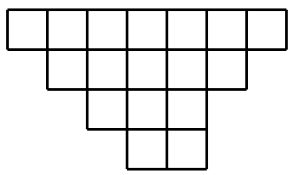
(18) 式の左辺の展開を考えるために，$x_i = t^i$ とおき，

$$\prod_{i=1}^{n}(1+x_i z) = (1+x_1 z)(1+x_2 z)\cdots(1+x_n z)$$

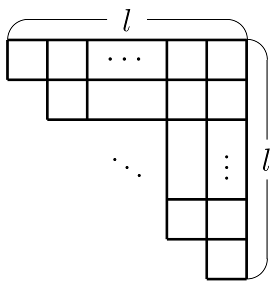
を展開する．一般に，これを展開したときの $z^l$ の係数は

$$x_{i(1)}x_{i(2)}\cdots x_{i(l)} \quad (1 \leqq i(1) < i(2) < \cdots < i(l) \leqq n)$$

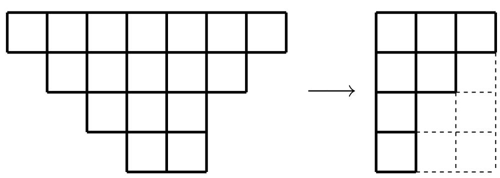
の形の単項式の和である．ここで，$x_i$ に対して $i$ 枚のタイルを横 1 列に並べたものを対応させ，その積 $x_{i(1)}x_{i(2)}\cdots x_{i(l)}$ には，1 段目に $i(l)$ 枚のタイルを，2 段目に $i(l-1)$ 枚のタイルを，$\cdots$，$l$ 段目に $i(1)$ 枚のタイルを，左端を 1 枚ずつずらして並べたものを対応させる．例えば，$x_2x_3x_5x_7$ には



を対応させる．このような図形（$l$ 段，1 段目のタイルは $n$ 枚以下）から，左側の $l$ 段からなる三角形部分




を取り除くと，縦 $l$，横 $n-l$ の長方形に含まれるヤング図形が得られる．例えば，$n=7$, $l=4$ のとき，$(1+x_1t)(1+x_2t)\cdots(1+x_7t)$ の $z^4$ の係数として現れる単項式 $x_2x_3x_5x_7$ には



を対応させる．この対応により，$z^l$ の係数に現れる単項式と，縦 $l$，横 $n-l$ の長方形に含まれるヤング図形は 1 対 1 に対応する．また，取り除いた $l$ 段の三角形に含まれるタイルの枚数は

$$1+2+\cdots+l=\frac{1}{2}l(l+1)$$

だから，$\prod_{i=1}^{n}(1+t^iz)$ における $z^l$ の係数は $t^{l(l+1)/2}F(n-l,l;t)$ に等しいことがわかる． □

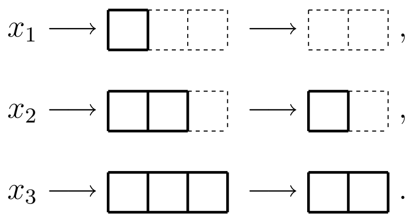
具体例で，証明の議論を見直しておこう．

**例 2.10.** $n=3$ のとき，

$$\begin{aligned}(1&+x_1z)(1+x_2z)(1+x_3z)\\ &=1+(x_1+x_2+x_3)z+(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)z^2+x_1x_2x_3z^3\end{aligned}$$

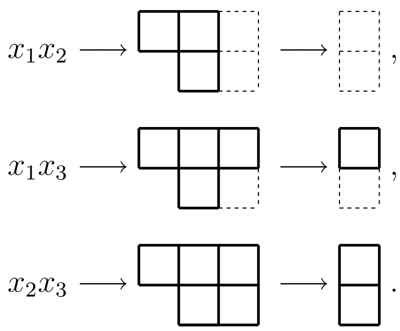
と展開される．

$l=1$ のとき，$z$ の係数に現れる単項式 $x_1$, $x_2$, $x_3$ に対応するヤング図形はそれぞれ次のようになる：



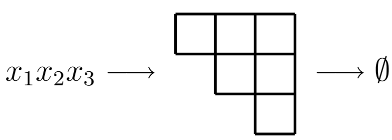

よって，$\prod_{i=1}^{3}(1+t^iz)$ における $z$ の係数は $tF(2,1;t)$ となる．

$l=2$ のとき，$z^2$ の係数に現れる単項式 $x_1x_2$, $x_1x_3$, $x_2x_3$ に対応するヤング図形は次のようになる：




よって，$\prod_{i=1}^{3}(1+t^iz)$ における $z^2$ の係数は $t^{1+2}F(1,2;t)$ となる．

最後に，$z^3$ の係数に現れる単項式 $x_1x_2x_3$ には，

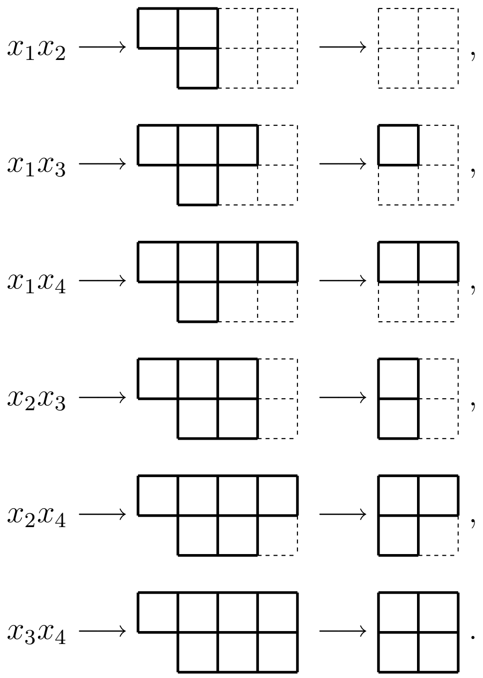



が対応するから，$\prod_{i=1}^{3}(1+t^iz)$ における $z^3$ の係数は $t^{1+2+3}F(3,0;t)$ となる．

**例 2.11.** $n = 4$, $l = 2$ のときを考える．つまり，

$$(1 + x_1 z)(1 + x_2 z)(1 + x_3 z)(1 + x_4 z)$$

における $z^2$ の係数を見よう．係数に現れる単項式とそれに対応するヤング図形（縦 2，横 2 の長方形に含まれる）は次のようになる：




従って，$\prod_{i=1}^{4}(1 + t^i z)$ における $z^2$ の係数は $z^{1+2}F(2, 2; t)$ に等しい．

**問 2.12.** $n = 5$ のとき，$\prod_{i=1}^{5}(1 + x_i z)$ における $z^2$, $z^3$ の係数に現れる単項式と対応するヤング図形をすべて書き，$\prod_{i=1}^{5}(1 + t^i z)$ における $z^2$, $z^3$ の係数がそれぞれ $z^3F(3, 2; t)$, $z^6F(2, 3; t)$ に等しいことを確かめよ．

# 3 分割数の母関数[9]

今回の講義では，形式的べき級数の概念とその和，積，無限積を導入し，分割数 $p(n)$ の母関数 $\sum_{n=0}^{\infty} p(n)t^n$ が無限積の形で簡単に表されることを説明する．

## 3.1 今回の主定理

正整数 $n$ に対して，$n$ の分割の個数を $p(n)$ と表し，分割数と呼んだ.（便宜上，$p(0) = 1$ と約束する.）$n$ が小さいときの $p(n)$ の値を表にまとめると，

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p(n)$ | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 7 | 11 | 15 | 22 | 30 | 42 | $\cdots$ |

[9]第 3 回，2006 年 11 月 18 日 15:00 〜 17:00.

となる．今回はこの分割数 $p(n)$ の母関数

$$
\begin{aligned}
&p(0)+p(1)t+p(2)t^2+p(3)t^3+p(4)t^4+\cdots+p(n)t^n+\cdots \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad = 1+t+2t^2+3t^3+5t^4+7t^5+11t^6+\cdots
\end{aligned}
$$

を考える．どの非負整数 $n$ についても $p(n)\neq 0$ だから，この母関数は多項式の範囲にはおさまらず，形式的べき級数を考える必要がある．また，形式的べき級数の範囲まで広げて考えることで，よい性質が見えてくる．

今回の主定理は次である．

**定理 3.1.** 形式的べき級数として

$$
\sum_{n=0}^{\infty} p(n)t^n = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1-t^k} \tag{19}
$$

が成り立つ．つまり，

$$
\begin{aligned}
&p(0)+p(1)t+p(2)t^2+p(3)t^3+p(4)t^4+\cdots+p(n)t^n+\cdots \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad = \frac{1}{1-t}\cdot\frac{1}{1-t^2}\cdot\frac{1}{1-t^3}\cdots\frac{1}{1-t^k}\cdots
\end{aligned}
$$

以下，この式の意味を説明し，証明を与える．

## 3.2 形式的ベキ級数

変数 $t$ に関する多項式とは

$$
a_0+a_1t+a_2t^2+\cdots+a_dt^d
$$

の形の有限和で表されるものである．これに対して，変数 $t$ に関する**形式的べき級数**（formal power series）とは，

$$
a_0+a_1t+a_2t^2+\cdots+a_nt^n+\cdots \tag{20}
$$

の形の無限和も許したものである．つまり，形式的べき級数は「無限大の次数も許した多項式」と考えることができる．そして，この無限和を $\sum_{n=0}^{\infty} a_nt^n$ と表すことにする．例えば，分割数の母関数

$$
\sum_{n=0}^{\infty} p(n)t^n
$$

は形式的べき級数である．また，$n>d$ となるすべての $n$ に対して $a_n=0$ が成り立っていれば，(20) 式の無限和は有限和となり，多項式と見ることができる．つまり，多項式は形式的べき級数の一部である．

**注意 3.2.** 形式的ベキ級数では，無限和が収束するかどうかや，変数 $t$ に値を代入することは考えないものとする．

**例 3.3.**

$$\sum_{i=0}^{\infty} t^i = 1 + t + t^2 + t^3 + t^4 + \cdots ,$$
$$\sum_{i=0}^{\infty} (i+1) t^i = 1 + 2t + 3t^2 + 4t^3 + 5t^4 + \cdots ,$$
$$\sum_{i=0}^{\infty} 2^i t^i = 1 + 2t + 4t^2 + 8t^3 + 16t^4 + \cdots$$

は形式的べき級数である．

次に，形式的ベキ級数の和と積を考えよう．2 つの形式的べき級数 $\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i$, $\sum_{i=0}^{\infty} b_i t^i$ に対して，その和を

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i + \sum_{i=0}^{\infty} b_i t^i = \sum_{i=0}^{\infty} (a_i + b_i) t^i, \tag{21}$$

つまり，

$$\begin{aligned}&\bigl(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + \cdots\bigr) + \bigl(b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + b_4 t^4 + \cdots\bigr)\\ &\qquad = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) t + (a_2 + b_2) t^2 + (a_3 + b_3) t^3 + (a_4 + b_4) t^4 + \cdots\end{aligned}$$

と定義する．また，その積を

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i\right) \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} b_i t^i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j}\right) t^i, \tag{22}$$

つまり，

$$\begin{aligned}&\bigl(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + \cdots\bigr) \cdot \bigl(b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + b_4 t^4 + \cdots\bigr)\\ &\quad = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) t + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) t^2 + (a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0) t^3\\ &\qquad + (a_0 b_4 + a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1 + a_4 b_0) t^4 + \cdots\end{aligned}$$

と定義する．これらの定義において，各 $t^n$ の係数には無限和が現れないことに注意する．また，形式的べき級数の和と積の定義は，（次数が無限大であることを許している点を除けば）多項式の和と積の定義と全く同じであり，形式的べき級数の和と積については多項式と同様に計算ができる．

**問 3.4.** 次の形式的べき級数の積を計算せよ：

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} t^i\right) \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} (i+1) t^i\right).$$

**答**. $t^i$ の係数を決めればよい：

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{i=0}^{\infty} t^i\right) \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} (i+1)t^i\right) \\
&\quad = \bigl(1 + t + t^2 + t^3 + t^4 + \cdots\bigr) \cdot \bigl(1 + 2t + 3t^2 + 4t^3 + 5t^4 + \cdots\bigr) \\
&\quad = 1 + (1+2)t + (1+2+3)t^2 + (1+2+3+4)t^3 + (1+2+3+4+5)t^4 \\
&\qquad + \cdots + (1+2+3+\cdots+(i+1))t^i + \cdots \\
&\quad = 1 + 3t + 6t^2 + 10t^3 + 15t^4 + \cdots + \frac{(i+1)(i+2)}{2}t^i + \cdots \\
&\quad = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(i+1)(i+2)}{2} t^i.
\end{aligned}$$

**例 3.5.** 形式的べき級数として

$$(1 - \alpha t) \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i t^i\right) = 1 \tag{23}$$

が成り立つ．実際,

$$\begin{aligned}
&(1 - \alpha t) \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i t^i\right) \\
&\quad = (1 - \alpha t) \cdot (1 + \alpha t + \alpha^2 t^2 + \alpha^3 t^3 + \cdots) \\
&\quad = 1 + (\alpha - \alpha)t + (\alpha^2 - \alpha \cdot \alpha)t^2 + (\alpha^3 - \alpha \cdot \alpha^2)t^3 + \cdots + (\alpha^i - \alpha \cdot \alpha^{i-1})t^i + \cdots \\
&\quad = 1
\end{aligned}$$

となる．

そこで，(23) 式から，形式的べき級数の世界では,

$$\frac{1}{1 - \alpha t}$$

は形式的べき級数

$$\sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i t^i = 1 + \alpha t + \alpha^2 t^2 + \alpha^3 t^3 + \cdots$$

に等しいと考えることにする．

この例 3.5 から,

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} t^i$$

となる．同様に考えると

$$\frac{1}{1-t^2} = 1 + t^2 + t^4 + t^6 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} t^{2i},$$

$$\frac{1}{1-t^3} = 1 + t^3 + t^6 + t^9 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} t^{3i},$$

であり，一般に

$$\frac{1}{1-t^k} = 1 + t^k + t^{2k} + t^{3k} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} t^{ki} \tag{24}$$

が成り立つ．これは，等比数列の和の公式を形式的に考えたものと見ることもできる．

形式的べき級数の世界では，無限積が定義できることもある．具体例で考えよう．

**例 3.6.** 無限積

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+t^k) = (1+t)(1+t^2)(1+t^3)\cdots$$

を考える．有限個で打ち切った積 $\prod_{k=1}^{m}(1+t^k)$ の展開を調べてみよう．例えば，$m = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ のときの展開を計算すると，

$$\begin{aligned}
&1+t = 1+t,\\
&(1+t)(1+t^2)\\
&\qquad = 1+t+t^2+t^3,\\
&(1+t)(1+t^2)(1+t^3)\\
&\qquad = 1+t+t^2+2t^3+t^4+t^5+t^6,\\
&(1+t)(1+t^2)(1+t^3)(1+t^4)\\
&\qquad = 1+t+t^2+2t^3+2t^4+2t^5+2t^6+2t^7+t^8+t^9+t^{10},\\
&(1+t)(1+t^2)(1+t^3)(1+t^4)(1+t^5)\\
&\qquad = 1+t+t^2+2t^3+2t^4+3t^5+3t^6+3t^7+3t^8+3t^9+3t^{10}\\
&\qquad\quad +2t^{11}+2t^{12}+t^{13}+t^{14}+t^{15}
\end{aligned}$$

となる．これを見ると，定数項と $t$ の係数は $m = 1,2,3,4,5$ で，$t^2$ の係数は $m = 2,3,4,5$ で，$t^3$ の係数は $m = 3,4,5$ で，$t^4$ の係数は $m = 4,5$ で，それぞれ等しくなっていることがわかる．また，最後の式の両辺に $(1+t^6)$, $(1+t^6)(1+t^7)$, $\cdots$ を掛けても，$t^5$ 以下の係数は影響を受けない．よって，$m \geqq 5$ であるかぎり，$\prod_{k=1}^{m}(1+t^k)$ における $t^0$, $t^1$, $t^2$, $t^3$, $t^4$, $t^5$ の係数は $m$ によらず一定である．一般に，非負整数 $i$ が与えられたとき，$\prod_{k=1}^{m}(1+t^k)$ における $t^i$ の係数は $m \geq i$ である限り一定である．そこで，この一定になった数を $a_i$ とおき，この無限積を

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+t^k) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i$$

と定義する．よって，

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+t^k) = 1+t+t^2+2t^3+2t^4+\cdots$$

となる．

一般に，形式的べき級数 $f_1(t), f_2(t), f_3(t), \cdots$ が与えられたとき，各非負整数 $i$ に対して，有限個（最初の $m$ 個）で打ち切った積 $\prod_{k=1}^{m} f_k(t)$ における $t^i$ の係数が $m$ を十分大きくとれば $m$ によらず一定となったとする．このとき，一定になった数を $a_i$ とおき，

$$\prod_{k=1}^{\infty} f_k(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i$$

と定義する．

**注意 3.7.** 無限積は常に定義できるとは限らない．例えば，無限積 $\prod_{k=1}^{n}(1+kt)$ は定義できない．$\prod_{k=1}^{m}(1+kt)$ における $t$ の係数は $m(m+1)/2$ であり，$m$ を大きくしても一定にはならない．

## 3.3 主定理の証明

以上で，定理 3.1 の意味が説明できたので，定理 3.1 の証明に取りかかろう．示すべき式 (19) の右辺の $k$ 番目の因子は

$$\frac{1}{1-t^k} = 1+t^k+t^{2k}+t^{3k}+\cdots$$

と展開できるから，$k>n$ のとき，

$$\frac{1}{1-t^k} = 1+（t^n \text{ より高い次数の項の和}）$$

である．よって，$\prod_{k=1}^{m} 1/(1-t^k)$ における $t^n$ の係数は，$m \geqq n$ であるかぎり $m$ にはよらず一定だから，無限積 $\prod_{k=1}^{\infty} 1/(1-t^k)$ が定義でき，その無限積における $t^n$ の係数は $\prod_{i=1}^{m} 1/(1-t^i)$ $(m \geqq n)$ における $t^n$ の係数に等しい．

そこで，$m \geqq n$ とし，

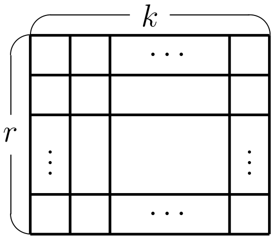
$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{m}\frac{1}{1-t^k} &= \frac{1}{1-t}\cdot\frac{1}{1-t^2}\cdot\frac{1}{1-t^3}\cdot\frac{1}{1-t^4}\cdots\frac{1}{1-t^m}\\ &= (1+t+t^2+t^3+t^4+\cdots)\\ &\quad\times(1+t^2+t^4+t^6+t^8+\cdots)\\ &\quad\times(1+t^3+t^6+t^9+t^{12}+\cdots)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\times (1 + t^4 + t^8 + t^{12} + t^{16} + \cdots) \\
&\times \cdots \\
&\times (1 + t^m + t^{2m} + t^{3m} + t^{4m} + \cdots)
\end{aligned}
$$

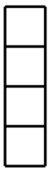
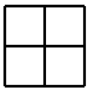
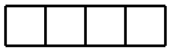
における $t^n$ の係数が分割数 $p(n)$ に等しいことを示そう．最後の積を展開して得られる各単項式に対して，ヤング図形を次のようにして対応させる．まず，

$$\frac{1}{1-t^k} = 1 + t^k + t^{2k} + t^{3k} + \cdots$$

に現れる $t^{rk} = (t^k)^r$ には，縦 $r$，横 $k$ の長方形




を対応させる．ここで，例えば $t^4$ は $1/(1-t)$, $1/(1-t^2)$, $1/(1-t^4)$ の展開に現れるが，それぞれ

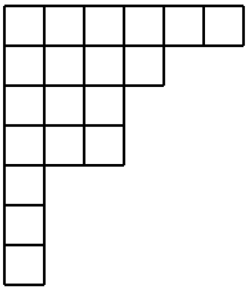
$(t^1)^4 \longleftrightarrow$ ，　$(t^2)^2 \longleftrightarrow$ ，　$(t^4)^1 \longleftrightarrow$ 

を対応させることによって，これらを区別していることに注意する．そして，$1/(1-t^{k(1)})$ から $t^{r(1)k(1)}$ を，$\cdots$，$1/(1-t^{k(h)})$ から $t^{r(h)k(h)}$ をとり，その他の因子からは $1$ を取り出してできる積 $t^{r(1)k(1)} \cdots t^{r(h)k(h)}$ には，縦 $r(1)$，横 $k(1)$ の長方形，$\cdots$，縦 $r(h)$，横 $k(h)$ の長方形を縦につなげてできるヤング図形を対応させる．例えば，

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1-t} &= 1 + t + t^2 + t^3 + \cdots & &\text{から } t^3 = (t^1)^3 \text{ を，} \\
\frac{1}{1-t^3} &= 1 + t^3 + t^6 + t^9 + \cdots & &\text{から } t^6 = (t^3)^2 \text{ を，} \\
\frac{1}{1-t^4} &= 1 + t^4 + t^8 + t^{12} + \cdots & &\text{から } t^4 = (t^4)^1 \text{ を，} \\
\frac{1}{1-t^6} &= 1 + t^6 + t^{12} + t^{18} + \cdots & &\text{から } t^6 = (t^6)^1 \text{ を，}
\end{aligned}
$$

それぞれとり，その他の因子からは $1$ を取り出してできる積 $(t^1)^3 \cdot (t^3)^2 \cdot (t^4)^1 \cdot (t^6)^1 =$

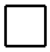
$t^{19}$ には，次のヤング図形を対応させる：



$n$ の小さい場合に，この対応を具体的に見ていこう．

**例 3.8.** $n=0$ のとき，$t^0$ はすべての因子から 1 を取ることによってできるから，対応するヤング図形はタイルがない状態（つまり，0 の分割 $\emptyset$ のヤング図形）であり，$t^0$ の係数は $1=p(0)$ である．

$n=1$ のとき，$t^1$ は $1/(1-t)$ の展開から $t^1$ を，その他の因子から 1 をとることによってできるから，対応するヤング図形は

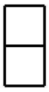
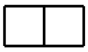


であり，$t^1$ の係数は $1=p(1)$ である．

$n=2$ のとき，$t^2$ は，

- $1/(1-t)$ の展開から $t^2=(t^1)^2$ を，その他の因子から 1 をとる，あるいは，
- $1/(1-t^2)$ の展開から $t^2=(t^2)^1$ を，その他の因子から 1 をとる

ことによってできる．これらの取り方に対応するヤング図形は，それぞれ

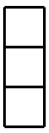
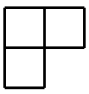
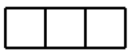
$(t^1)^2 \longleftrightarrow$ , $(t^2)^1 \longleftrightarrow$ 

となるから，$t^2$ の係数は $2=p(2)$ である．

同様に，$t^3$ は，

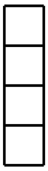
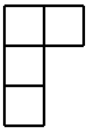
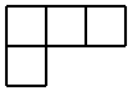
- $1/(1-t)$ から $(t^1)^3$ をとり，その他の因子から 1 をとる，あるいは，
- $1/(1-t)$ から $(t^1)^1$ を，$1/(1-t^2)$ から $(t^2)^1$ をとり，その他の因子から 1 をとる，あるいは，
- $1/(1-t^3)$ から $(t^3)^1$ をとり，その他の因子から 1 をとる

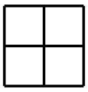
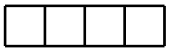
ことによってでき，対応するヤング図形はそれぞれ

$(t^1)^3 \longleftrightarrow$ , $(t^1)^1\cdot(t^2)^1 \longleftrightarrow$ , $(t^3)^1 \longleftrightarrow$ 

となるから，$t^3$ の係数は $3=p(3)$ である．

同様にして，$t^4$ の係数を考えると，$t^4$ の作り方と 4 枚のタイルからなるヤング図形は，次のように対応している：

$(t^1)^4 \longleftrightarrow$ , $(t^1)^2 \cdot (t^2)^1 \longleftrightarrow$ , $(t^1)^1 \cdot (t^3)^1 \longleftrightarrow$ 

$(t^2)^2 \longleftrightarrow$ , $(t^4)^2 \longleftrightarrow$ 

よって，$t^4$ の係数は $5 = p(4)$ である．

**問 3.9.** $t^5$, $t^6$ の係数についても同様に考え，その係数が $p(5)$, $p(6)$ に等しいことを確かめよ．

以上の議論から，$m \geqq n$ のとき，$\prod_{k=1}^{m} 1/(1-t^k)$ を展開したときに $t^n$ を与える項の取り出し方と，$n$ 枚のタイルからなるヤング図形が 1 対 1 に対応していることがわかる．従って，(19) の右辺を展開したときの $t^n$ の係数は，$n$ の分割の個数 $p(n)$ に等しい．つまり，(19) 式が成り立つ． $\square$

## 3.4 応用

母関数の間の等式を示すことによって，思いがけない関係式を導くことができる．

正整数 $n$ に対して，$n$ を相異なる正整数の和として表す分割の個数を $q(n)$ とし，$n$ を奇数の和として表す分割の個数を $p_{\mathrm{odd}}(n)$ とする．ただし，$q(0) = p_{\mathrm{odd}}(0) = 1$ と定める．

**例 3.10.** $n$ が小さいときに，この条件をみたす分割を書き下してみると，

| $n$ | 相異なる正整数への分割 | 奇数への分割 |
|---|---|---|
| 1 | $1$ | $1$ |
| 2 | $2$ | $1+1$ |
| 3 | $3$ | $3$ |
| | $2+1$ | $1+1+1$ |
| 4 | $4$ | $3+1$ |
| | $3+1$ | $1+1+1+1$ |
| 5 | $5$ | $5$ |
| | $4+1$ | $3+1+1$ |
| | $3+2$ | $1+1+1+1+1$ |
| 6 | $6$ | $5+1$ |
| | $5+1$ | $3+3$ |
| | $4+2$ | $3+1+1+1$ |
| | $3+2+1$ | $1+1+1+1+1+1$ |

となるから，

$$
\begin{aligned}
&q(1)=p_{\mathrm{odd}}(1)=1, \quad q(2)=p_{\mathrm{odd}}(2)=1, \quad q(3)=p_{\mathrm{odd}}(3)=2,\\
&q(4)=p_{\mathrm{odd}}(4)=2, \quad q(5)=p_{\mathrm{odd}}(5)=3, \quad q(6)=p_{\mathrm{odd}}(6)=4.
\end{aligned}
$$

この例から，$n \leqq 6$ のとき $q(n)=p_{\mathrm{odd}}(n)$ となっているが，実は一般に次の定理が成り立つ．

**定理 3.11.** 正整数 $n$ を相異なる正整数の和として表す分割の個数と，$n$ を奇数の和として表す分割の個数は等しい．つまり，

$$
q(n)=p_{\mathrm{odd}}(n). \tag{25}
$$

**証明.** 母関数を考えることにより，形式的べき級数の等式

$$
\sum_{n=0}^{\infty} q(n)t^n=\sum_{n=0}^{\infty} p_{\mathrm{odd}}(n)t^n
$$

を示せばよい．ところが，定理 3.1 の証明と同様に考えると，

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} q(n)t^n &= \prod_{k=1}^{\infty}(1+t^k) \qquad (26)\\
&=(1+t)(1+t^2)(1+t^3)\cdots
\end{aligned}
$$

となり，

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} p_{\mathrm{odd}}(n)t^n &= \prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-t^{2k-1}} \qquad (27)\\
&=\frac{1}{1-t}\cdot\frac{1}{1-t^3}\cdot\frac{1}{1-t^5}\cdots\\
&=(1+t+t^2+\cdots)(1+t^3+t^6+\cdots)(1+t^5+t^{10}+\cdots)\cdots
\end{aligned}
$$

となることがわかる．よって，

$$
\prod_{k=1}^{\infty}(1+t^k)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-t^{2k-1}} \tag{28}
$$

となることを示せばよい．

さて，$1+t^i=(1-t^{2i})/(1-t^i)$ であることに注意すると，

$$
\begin{aligned}
&(1+t)(1+t^2)(1+t^3)(1+t^4)(1+t^5)\\
&\quad=\frac{1-t^2}{1-t}\cdot\frac{1-t^4}{1-t^2}\cdot\frac{1-t^6}{1-t^3}\cdot\frac{1-t^8}{1-t^4}\cdot\frac{1-t^{10}}{1-t^5}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{1-t} \cdot \frac{1}{1-t^3} \cdot \frac{1}{1-t^5} \cdot (1-t^6)(1-t^8)(1-t^{10})$$

と変形できる．よって，$n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ については，

$$\begin{aligned}
&(1+t)(1+t^2)(1+t^3)(1+t^4)(1+t^5) \text{ における } t^n \text{ の係数} \\
&\qquad = \frac{1}{1-t} \cdot \frac{1}{1-t^3} \cdot \frac{1}{1-t^5} \text{ における } t^n \text{ の係数}
\end{aligned}$$

となり，

$$\prod_{i=1}^{\infty}(1+t^i) \text{ における } t^n \text{ の係数} = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-t^{2i-1}} \text{ における } t^n \text{ の係数}$$

となることがわかる．一般の $n$ については，$m \geqq n$ となる奇数 $m$ を考え，

$$\begin{aligned}
&(1+t)(1+t^2)(1+t^3)\cdots(1+t^m) \\
&\quad = \frac{1-t^2}{1-t} \cdot \frac{1-t^4}{1-t^2} \cdot \frac{1-t^6}{1-t^3} \cdot \frac{1-t^{2m}}{1-t^m} \\
&\quad = \frac{1}{1-t} \cdot \frac{1}{1-t^3} \cdots \frac{1}{1-t^m} \cdot (1-t^{m+1})(1-t^{m+3})\cdots(1-t^{2m})
\end{aligned}$$

と変形することにより，$\prod_{i=1}^{\infty}(1+t^i)$ における $t^n$ の係数と，$\prod_{i=1}^{\infty} 1/(1-t^{2i-1})$ における $t^n$ の係数が一致することがわかる．従って，(28) 式が成り立つ． □

形式的べき級数の無限積を考えることで，

$$\prod_{i=1}^{\infty}(1+t^i) = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1-t^{2i}}{1-t^i} = \frac{\prod_{i=1}^{\infty}(1-t^{2i})}{\prod_{i=1}^{\infty}(1-t^i)} = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-t^{2i-1}}$$

と，無限回の約分をしたことになる．

定理 3.11 は，$n$ を相異なる正整数の和として表す分割と，$n$ を奇数の和として表す分割の間に 1 対 1 対応を構成することによって，証明することもできる．（レポート課題：問題 7 を見よ.）

# 4 オイラーの五角数定理[10]

今回の講義では，無限積 $\prod_{i=1}^{\infty}(1-t^i)$ の展開を与えるオイラーの五角数定理を証明し，分割数 $p(n)$ に関する漸化式を導く．

[10]第 4 回，2006 年 12 月 2 日 15:00 〜 17:00.

## 4.1　オイラーの五角数定理

前回証明した（定理 4.1）ように，分割数の母関数は

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)t^n = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-t^i}$$

と無限積で表された．ここでは，右辺の逆数である無限積

$$\prod_{i=1}^{\infty}(1-t^i)$$

の展開を考える．例えば，$\prod_{i=1}^{50}(1-t^i)$ を展開することにより，

$$\prod_{i=1}^{\infty}(1-t^i) = 1 - t - t^2 + t^5 + t^7 - t^{12} - t^{15} + t^{22} + t^{26} - t^{35} - t^{40} + \cdots$$

となることがわかる．この展開を見ると，係数には 0, 1, $-1$ しか現れていない，0 でない係数を取り出すと $1, -1, -1, 1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, -1, \cdots$ と（最初の 1 を除いて）1 と $-1$ が 2 つずつ交互に現れる，という特徴がある．そこで，定数項以外の 0 でない項の次数とその係数を取り出してみると，

| 0 でない項の次数 | 1 | 5 | 12 | 22 | 35 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 2 | 7 | 15 | 26 | 40 | $\cdots$ |
| 係数 | $-1$ | $+1$ | $-1$ | $+1$ | $-1$ | $\cdots$ |

となる．階差数列を考えることにより，1 段目の数列の一般項は $k(3k-1)/2$，2 段目の数列の一般項は $k(3k+1)/2$ で与えられることが予想される．実は，次のオイラー[11]の五角数定理が成り立つ．

**定理 4.1.（オイラーの五角数定理）** 形式的べき級数として

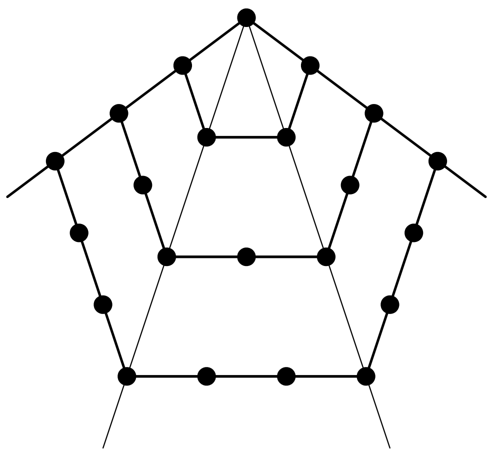
$$\prod_{i=1}^{\infty}(1-t^i) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k t^{k(3k-1)/2} + \sum_{l=1}^{\infty}(-1)^l t^{l(3l+1)/2} \tag{29}$$

が成り立つ．

この定理 4.1 が「五角数」定理と呼ばれる理由は，右辺の $t$ のべきに現れる $k(3k-1)/2$ が五角数と呼ばれることにある．1 辺の長さが 1, 2, 3, 4, $\cdots$ である

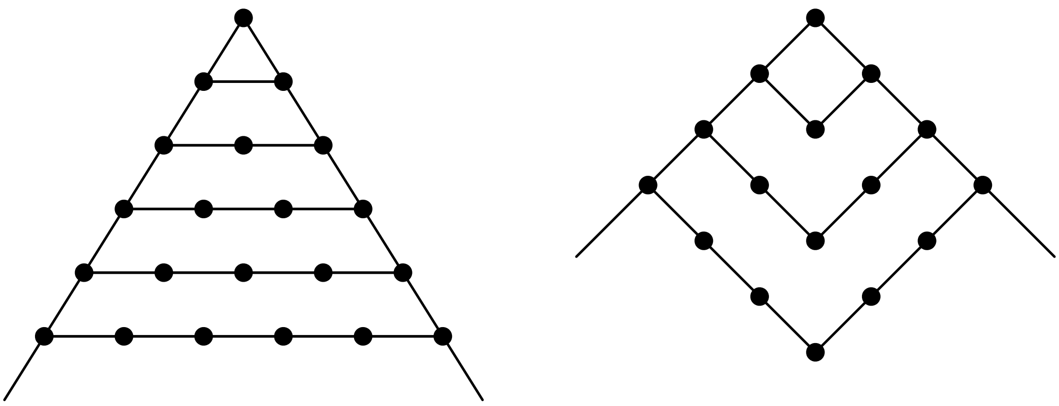
[11]Leonhard Euler，1707 年 4 月 15 日〜 1783 年 9 月 18 日．スイス生まれの数学者・物理学者・天文学者．18 世紀最高の数学者であり，整数論，代数学，解析学，幾何学，天文学など幅広い分野にわたって，膨大な著作，論文を著している．また，オイラーの名前のついた公式や用語も多い．

正五角形を，1 つの頂点とそれをはさむ 2 辺が重なるように描き，各正五角形の頂点と辺上に間隔を 1 ずつあけて碁石をおく．



このとき，1 辺の長さが $k-1$ の正五角形の内部（辺も含む）にある碁石の個数が五角数 $k(3k-1)/2$ となる．例えば，1 辺の長さが 1, 2, 3 の正五角形の内部（辺も含む）には 5 個，12 個，22 個の碁石がある．

**注意 4.2.** 正五角形の代わりに，正三角形，正方形を用いると，三角数 $k(k+1)/2$，四角数 $(k-1)^2$ が得られる．



## 4.2 証明

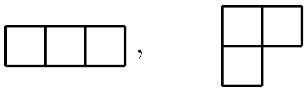
まず，無限積 $\prod_{i=1}^{\infty}(1-t^i)$ を展開したときの係数を，分割を用いて表そう．そのための手がかりとして，$\prod_{i=1}^{\infty}(1+t^i)$ の展開から考えよう．定理 3.11 の証明でも触れたように，$n$ を相異なる正整数の和として表す分割の個数を $q(n)$ とするとき，

$$\prod_{i=1}^{\infty}(1+t^i) = \sum_{n=0}^{\infty} q(n)t^n$$

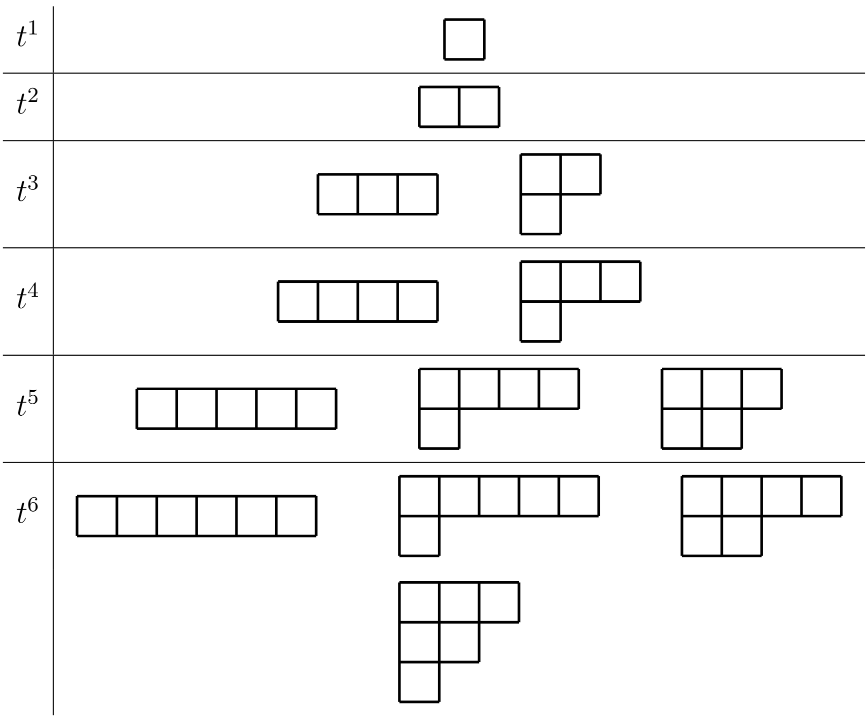
であった．$1+t^i$ の $t^i$ に対して，$i$ 枚のタイルを横 1 列に並べたものを対応させ，その積にはこの横 1 列のタイルの並びを縦に積み重ねてできるヤング図形を対応させる．この対応で，$\prod_{i=1}^{\infty}(1+t^i)$ の展開を考える．例えば，$t^3$ は，

- $1+t^3$ から $t^3$ を，その他の因子から 1 をとる，あるいは，
- $1+t$ から $t$ を，$1+t^2$ から $t^2$ を，その他の因子から 1 をとる，

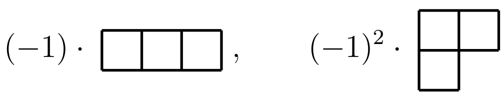
によってできるから，$t^3$ を与えるヤング図形は



の 2 つである．同様にして，$t^1, \cdots, t^6$ はそれぞれ次のようなヤング図形から得られる：



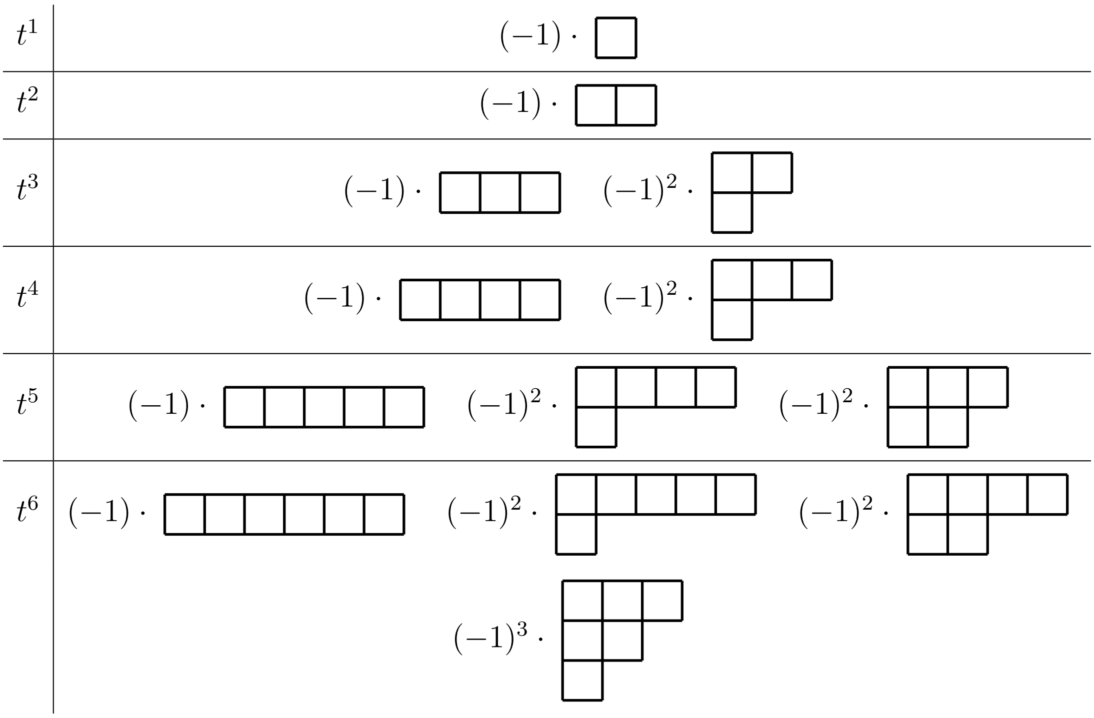

さて，$\prod_{i=1}^{\infty}(1-t^i)$ の展開を考えよう．今度は $1-t^i = 1+(-t^i)$ なので，$i$ 枚のタイルを横 1 列に並べたものに符号 $-1$ をつける必要があり，符号つきでヤング図形を数えることになる．例えば，$t^3$ は




の 2 つの符号つきヤング図形から得られるから，$t^3$ の係数は

$$(-1)+(-1)^2 = 0$$

となる．同様にして，$t^1, \cdots, t^6$ を与える符号つきヤング図形は，次のようになる：




よって，$t^1,\cdots,t^6$ の係数はそれぞれ次のようになる．

| | |
|---|---|
| $t^1$ | $-1$ |
| $t^2$ | $-1$ |
| $t^3$ | $(-1)+(-1)^2=0$ |
| $t^4$ | $(-1)+(-1)^2=0$ |
| $t^5$ | $(-1)+(-1)^2+(-1)^2=1$ |
| $t^6$ | $(-1)+(-1)^2+(-1)^2+(-1)^3=0$ |

一般に，ヤング図形に付随している符号は，ヤング図形の段数を $r$ とするとき，$(-1)^r$ で与えられるから，以上の議論により次の命題が得られる．

**命題 4.3.** $n$ を相異なる正整数の和として表す分割で項の数が偶数であるものの個数を $q_+(n)$，$n$ を相異なる正整数の和として表す分割で項の数が奇数であるものの個数を $q_-(n)$ とすると，形式的べき級数として

$$\prod_{i=1}^{\infty}(1-t^i)=\sum_{n=0}^{\infty}(q_+(n)-q_-(n))t^n \tag{30}$$

が成り立つ．ただし，$q_+(0)=1$, $q_-(0)=0$ と約束する．

従って，定理 4.1 を証明するためには，次の命題を示せば十分である．

**命題 4.4.** $n$ が正整数であるとき，

$$q_+(n) - q_-(n) = \begin{cases} (-1)^k & \text{（$n$ が正整数 $k$ を用いて $n = k(3k \pm 1)/2$ と表されるとき）} \\ 0 & \text{（その他）} \end{cases} \tag{31}$$

つまり，

(a) $n$ が正の偶数 $k$ を用いて $n = k(3k \pm 1)/2$ と表されるときは，$q_+(n) = q_-(n) + 1$,

(b) $n$ が正の奇数 $k$ を用いて $n = k(3k \pm 1)/2$ と表されるときは，$q_+(n) = q_-(n) - 1$,

(c) その他のときは，$q_+(n) = q_-(n)$.

この命題を証明するために，$n$ を相異なる正整数の和として表す分割で項の数が偶数であるものと，$n$ を相異なる正整数の和として表す分割で項の数が奇数であるものとの間に,「ほぼ 1 対 1 の対応」を構成しよう．ここで,「ほぼ 1 対 1 の対応」というのは,

(a) $n = k(3k \pm 1)$（$k$ は正の偶数）のときは，項の数が偶数であるものが 1 つ余り，その他のものが 1 対 1 に対応する,

(b) $n = k(3k \pm 1)$（$k$ は正の奇数）のときは，項の数が奇数であるものが 1 つ余り，その他のものが 1 対 1 に対応する,

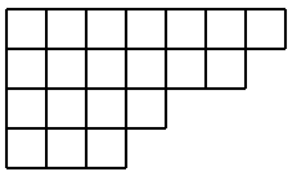
(c) その他のときは，ちょうど 1 対 1 に対応する,

という意味である．

このような対応を構成するために，相異なる正整数の和として表す分割が与えられたとき，$a, b$ を次のように定める：

$$\underbrace{m + (m-1) + \cdots + (m-a+1)}_{a\text{ 個}} + ((m-a) \text{ より小さい項}) + \cdots + b.$$

ここで，$m$ は最大の項，$b$ は最小の項である．つまり，ヤング図形の言葉でいうと，$a$ はヤング図形の右端が最上段から 1 つずつ左にずれていくような段の数であり，$b$ はヤング図形の最下段のタイルの枚数である．例えば，分割 $7+6+4+3$ のとき，つまり，



のときは，$a = 2, b = 3$ である．このように，$a, b$ を決めたとき，新しい分割を次のように対応させる：

- $a < b$ のときは，最初の $a$ 項から 1 ずつ引き，最後に項 $a$ を付け加えて，

$$\underbrace{(m-1)+(m-2)+\cdots+(m-a)}_{a\text{ 個}}+((m-a)\text{ より小さい項})+\cdots+b+a$$

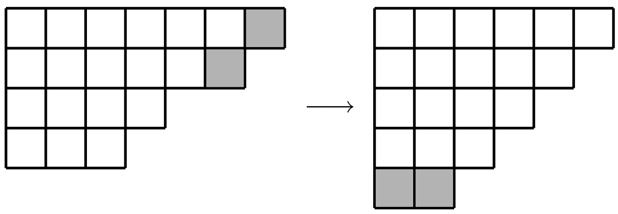
  を対応させる．
- $a \geqq b$ のときは，最初の $b$ 項に 1 ずつ加え，最後の項 $b$ を取り去って，

$$\underbrace{\overbrace{(m+1)+m+\cdots+(m-b+2)}^{b\text{ 個}}+(m-b)+\cdots+(m-a+1)}_{a\text{ 個}}$$
$$+((m-a)\text{ より小さい項})+\cdots$$

  を対応させる．

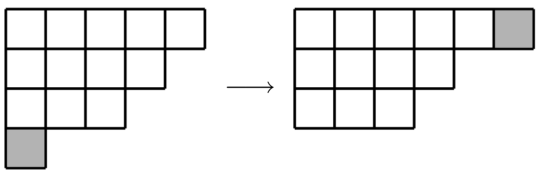
つまり，$a < b$ のときは最上段から階段状になっている部分の $a$ 枚のタイルを各段から 1 枚ずつ取り，最下段に付け加えてできるヤング図形を対応させ，$a \geqq b$ のときは最下段の $b$ 枚のタイルを取り，最上段から階段上になっている部分の各段に 1 枚ずつ付け加えてできるヤング図形を対応させている．

**例 4.5.** 分割 $7+6+4+3$ については，$a=2, b=3$ だから，



と，右上の 2 枚のタイル（影をつけたもの）最下段に移すことになり，分割 $6+5+4+3+2$ が対応する．逆に，分割 $6+5+4+3+2$ を考えると，$a=5, b=2$ となるから，$7+6+4+3$ が対応する．

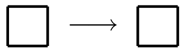
分割 $5+4+3+1$ を考えると，$a=3, b=1$ だから，



となり，$6+4+3$ が対応する．逆に，分割 $6+4+3$ を考えると，$a=1, b=3$ となるから，$5+4+3+1$ が対応する．

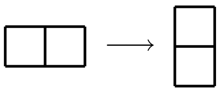
これらの例は，対応がうまくいっている場合であり，$a, b$ の大小関係が対応の前後で変わり，この対応を 2 度繰り返すともとに戻る．しかし，この対応がいつもうまくいくとは限らない．つまり，新しいヤング図形が相異なる正整数の和として表す分割に対応しなかったり，新しいヤング図形の段数がもとのヤング図形の段数と同じになったりすることがある．どのような場合に上の対応がうまく行かないかを調べるために，タイルの枚数が少ない場合を順に見ていこう．

**例 4.6.** まず，$n=1$ のとき，分割 1 については，$a=b=1$ であり，



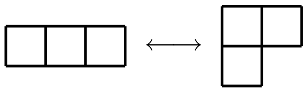
となるから，ヤング図形の段数が変わらない．

$n=2$ のとき，分割 2 については，$a=1$, $b=2$ であり，



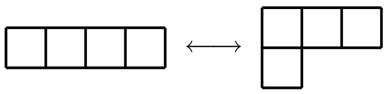
となるから，対応する分割 $1+1$ は相異なる正整数の和になっていない．

$n=3$ のときは,



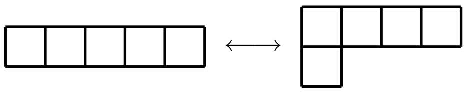
とうまく対応している．

$n=4$ のときも,

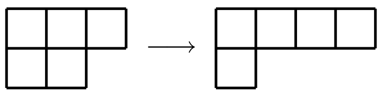


とうまく対応している．

$n=5$ のとき,

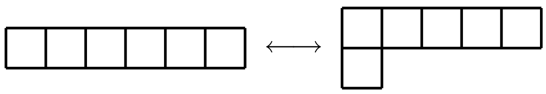


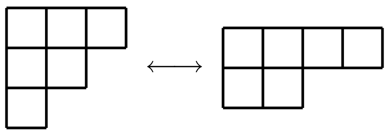
と対応しているが，分割 $3+2$ については，$a=2$, $b=2$ であり，



となるから，ヤング図形の段数が変わっていない．

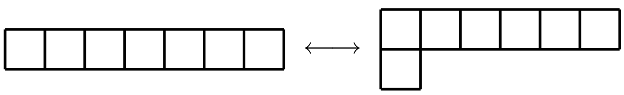
$n=6$ のときは,

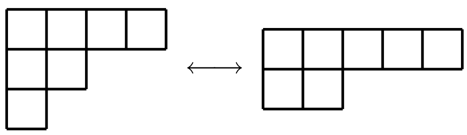

,



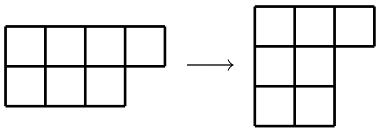
とうまく対応している．

しかし，$n=7$ では,


,



はうまく対応しているが，分割 $4+3$ を考えると，$a=2,\, b=3$ であり，



となるから，対応する分割 $3+2+2$ は相異なる正整数の和になっていない．

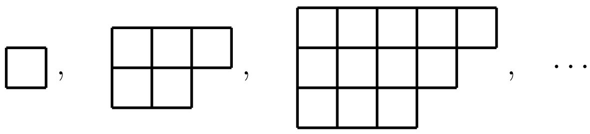
**問 4.7.** これを続けて，$n=8,\, 9,\, 10,\, 11,\, 12$ の場合を考えよ．

これらの例から，対応がうまくいっていないのは，

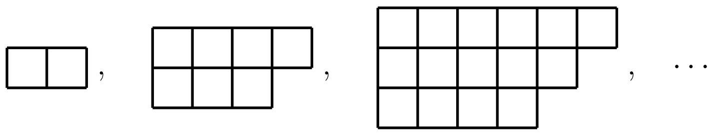
(1) 新しいヤング図形の段数がもとのヤング図形の段数と変わらないとき，

(2) 新しいヤング図形に対応する分割が相異なる正整数の和でないとき，

のいずれかであることがわかる．また，(1) のようになるのは，ヤング図形が

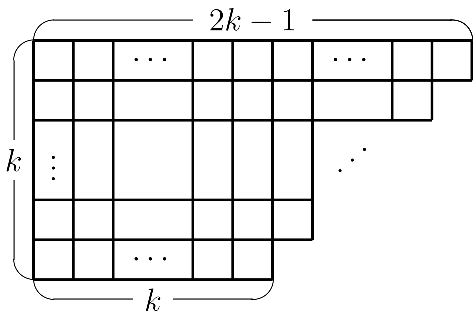


の形のときであり，(2) のようになるのは，ヤング図形が



の形のときである．一般に，

$$\underbrace{(2k-1)+(2k)+\cdots+(k+1)+k}_{k\text{ 項}}$$

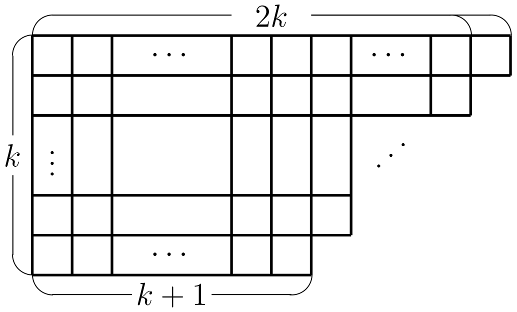


については，$a=b=k$ であり，これに上の操作を施してできる分割は

$$\underbrace{(2k)+(2k-1)+\cdots+(k+2)+1}_{k\text{ 項}}$$

となるから，ヤング図形の段数が変わっていない．また，

$$\underbrace{(2k)+(2k-1)+\cdots+(k+2)+(k+1)}_{k\text{ 項}}$$




については，$a = k, b = k+1$ であり，上の操作を施してできる分割は

$$\underbrace{(2k-1)+(2k-2)+\cdots+(k+1)+k}_{k \text{ 項}}+k$$

となるから，相異なる正整数の和になっていない．これらの 2 つのタイプのヤング図形を除けば，上の対応がうまくいき，段数が偶数のものと段数が奇数のものとの間の 1 対 1 対応を与えることになる．従って，命題 4.4 が示され，定理 4.1 の証明が完成した． □

## 4.3 分割数の漸化式

前回の定理 3.1 から，

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)t^n = \prod_{i=0}^{\infty} \frac{1}{1-t^i}$$

であり，今回の定理 4.1 から，

$$1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k t^{k(3k-1)/2}+\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^l t^{l(3l+1)/2}=\prod_{i=1}^{\infty}(1-t^i)$$

である．この 2 つの式の両辺を掛けあわせると，

$$(p(0)+p(1)t+p(2)t^2+p(3)t^3+p(4)t^4+\cdots)$$
$$\times(1-t-t^2+t^5+t^7-t^{12}-t^{15}+\cdots)=1$$

となる．両辺の $t^n$ の係数を比較すると，

$$p(n)-p(n-1)-p(n-2)+p(n-5)+p(n-7)-p(n-12)-p(n-15)+\cdots$$
$$=0$$

が得られる．従って，$p(n)$ 以外の項を移項することにより，次の漸化式が導かれる．

**系 4.8.**

$$p(n) = \sum_{k} (-1)^{k-1} p\left(n - \frac{1}{2}k(3k-1)\right) + \sum_{l} (-1)^{l-1} p\left(n - \frac{1}{2}l(3l+1)\right) \tag{32}$$

が成り立つ．ただし，$k, l$ は $n \geq k(3k-1)/2$, $n \geq l(3l+1)/2$ をみたす正整数すべてを動く．

この漸化式を用いて，分割数 $p(n)$ を計算してみよう．

**例 4.9.** $p(0) = 1$ から始めると，

$$\begin{aligned}
p(1) &= p(0) = 1, \\
p(2) &= p(1) + p(0) = 2, \\
p(3) &= p(2) + p(1) = 3, \\
p(4) &= p(3) + p(2) = 5, \\
p(5) &= p(4) + p(3) - p(0) = 7, \\
p(6) &= p(5) + p(4) - p(1) = 11, \\
p(7) &= p(6) + p(5) - p(2) - p(0) = 15, \\
p(8) &= p(7) + p(6) - p(3) - p(1) = 22
\end{aligned}$$

となる．

**問 4.10.** これを続けて，$p(9), p(10), \cdots, p(15)$ を求めよ．

# 参考文献

今回の講義で扱った話題に関連する文献をいくつか挙げておく．


- G. E. Andrews and K. Eriksson, “Integer Partitions”, Cambridge Univ. Press, 2004. （邦訳：佐藤 文広（訳）「整数の分割」，数学書房.）

  分割の理論の大家である Andrews と組合せ論の専門家である Eriksson の 2 人によって書かれた初等的な本である．高校〜大学 1 年生程度の予備知識で読むことができる．

- G. E. Andrews, “The Theory of Partitions”, Cambridge Univ. Press, 1998.

  上の本の著者の一人である Andrews によって書かれたものである．初版は 30 年程度昔に出版されたが，現在でもその価値は衰えていない．

- R. P. Stanley, “Enumerative Combinatorics, Vol. 1”, Cambridge Univ. Press, 1996. （邦訳：山田 浩，清水 昭信，渡辺 敬一，成嶋 弘（訳）「数え上げ組合せ論 I」，日本評論社.）
  R. P. Stanley, “Enumerative Combinatorics, Vol. 2”, Cambridge Univ. Press, 1999.

  分割，ヤング図形に限らず，数え上げ組合せ論のさまざまな話題，手法がこの大部の 2 巻につまっている．

- 雑誌「数理科学 2007 年 1 月号」（特集「ヤング図形で遊ぶ物理と数学」），サイエンス社.

  この特集では，ヤング図形が現代の最先端の数学，物理学でどのような役割を果たしているか，どのような形で現れているかが，解説されている．