数学とは何か
20 世紀に数学はどのような進歩をしたか

中西 知樹

1. この講義の目的

高校生のみなさんにとって, おそらく数学は, 小学生の算数以来, 他の教科と比べて最も時間を費して勉強してきた科目だと思います. ですから, この講義のタイトルである「数学とは何か」という問いの答えとして, すでにみなさんはかなりはっきりとした「数学」についてのイメージをそれぞれ持っていることでしょう.

それでは, 大学で学ぶ数学や, その先に続く現在数学者によって研究されている「学問としての数学」についてはどのようなイメージを持っていますか?

例えば, 映画やドラマに登場する数学者は, たいてい黒板に複雑な「方程式」や「積分」を書いて, 頭をかきむしりながらうんうんうなっています. 職業柄, 私はこのようなシーンが出て来ると必ず「黒板に書かれている式」を読まずにはいられません. 残念ながらそれらは一見複雑で高級そうに見えますがたいていは意味不明なでたらめなものです.

けれども, みなさんが持っている「学問としての数学」のイメージは, このようなドラマにおける数学者のイメージと, 案外, 近いのではないでしょうか. つまり, 高校までに習った方程式や微分積分をどんどん複雑にして, それらを解いたり計算したりすることを極めていくというイメージです.

しかしながら, このようなイメージは, 実際に私たち現代の数学者が日々研究をしている「数学」とはかなり違ったものなのです.

あるいは, 数学に関心があって, 自分で数学について書かれたものをいろいろと読んでいる方は, 数学の歴史についてつぎのような印象を持っているかも知れません.

数学はユークリッドの幾何学から始まり, デカルト, ニュートン, オイラー, ガウス, ガロアなどの偉大な数学者の業績によって 19 世紀ごろにほぼ完成を遂げたが, 「フェルマーの定理」や「リーマン予想」などのいくつかの難問が残っている. 前者は最近ようやく解決され, 残りの難問を解決することが現在の数学の目標である, と.

もし, そのとおりだとすると, 数学の重要な定理はすでにほぼ発見されつくされていて, よほど特殊な才能がある人しか新しい定理を発見し数学の世界に貢献することができないことになります.

そう考えると, 自分は大学に入って数学を学ぶのはやめて別の勉強をしよう, ということに普通はなります (よね).

しかしながら, このようなイメージも, 実は, 私たち現代の数学者が日々研究をしている「数学」とはかなり違ったものなのです.

数学が, 20 世紀に大きな飛躍を遂げ, その研究手法や研究対象を一新したことは一般にはあまり知られていません.

また, 数学が今でも活発に成長をし続けているまだまだ若い学問で新しい定理が世界中で日々発見され続けていることもあまり知られていません.

そして, 高校生のときに, 自分自身で数学の特別な才能があると思わない人でも, 良い観察力と忍耐があれば, 将来新しい数学の定理を発見することがそれほど難しくないこともあまり知られていません.

この講義の目的は, 20 世紀に数学がどのような飛躍を遂げたかということ, そして (こちらの方がより大事なのですが) 数学が現在も日々成長を続けている学問であるということを, たとえ一部であっても, 何とかみなさんにお伝えすることです.

みなさんの中には, もともとは数学が好きだったのに, 受験勉強でうんざりして「数学はもういいや」と思ってしまっている人もきっといることでしょう. けれども, みなさんが高校までに学ぶ数学はその先にあるもっと広く新しい数学の世界のほんの一部です.

この講義を聞いて, 「大学でも, もう少し数学の勉強を続けてみようかな」と思う人たちがたとえ少しであっても良いから出てきてくれる, そのような講義にしたいと思います.

2. 講義のやり方

講義は計３回 (１回１時間) で, 毎回３つのパートに分かれています.

パート１. Mathematics Today (今日の数学)

Q&A 形式で, 成長を日々続けている現在の数学の姿をお伝えします.

パート２. 現代数学の考え方

数学は２０世紀に「集合と写像」をその研究手法の基礎におくことによって大きな飛躍を遂げました. ここでは, その基本的な考え方を学びます.

パート３. 応用

パート２で学んだ考え方の応用例を学びます.

3. 具体的な内容 (予定)

第１回 テーマ：集合と写像

パート１. Mathematics Today

Q. 現在数学者は世界に何人いるのか?

Q. 世界中で一日に数学の新しい定理はいくつ発見されているのか?

パート２. 集合と写像

集合と写像の基本について説明します. だいたい高校で習うことと同じです.

パート３．連立１次方程式の解のパターンの分類

連立１次方程式は解があったり, なかったりします. 解がある場合でも, 解が一つの場合と無数の場合があり, 無数の場合にもいろいろなパターンがあります. これを集合と写像の問題と考えると見通しがいっきに開けるのです.

第２回 テーマ：集合をつくる
パート１．Mathematics Today
Q. 数学とは何を研究する学問か？
Q. 証明は何のためにするのか?
パート２．集合を作る
集合は数学における「世界」です. 集合を作る (= 世界を作る) いろいろな方法を学びます.
パート３．実数の集合を作る
整数の集合から有理数 (分数) の集合を作ったように, 有理数の集合から実数の集合を作ることができます. これにより, 不思議な等式 $0.999\cdots = 1.000\ldots$ の意味を本当に理解することができるのです.

第３回 テーマ：構造を考える
パート１．Mathematics Today
Q. 数学の研究はどのように行われるのか?
Q. 数学の新しい定理はなぜ発見され続けるのか?
パート２．集合の構造
集合とは, 建物にたとえると単なる「材料」の集まりですが, それらの材料を「組み立てる」ことによって集合にいろいろな性質が生まれてきます. この「組み立て方」のことを建物にたとえてその集合の「構造」といいます. ここでは基本的な構造の例について学びます.
パート３．内容未定
まとめ. 数学と人間とどちらが先か?

4. 第１回講義のための Homework.

数学の研究の第一歩は, 考えている数学の世界に慣れること. そしてそのつぎのステップは, その世界の様子をよく観察することです.

第１回の講義の前に, 以下の問題を自分で考えて, 様子をよく観察しておいてください.

連立１次方程式の解のパターンの分類

中学で習ったと思いますが, １変数の１次方程式

$$ax = b$$

の解のパターンは以下のように分類できます.

0: $a = 0, b \neq 0$ のとき, 解は存在しない.
1: $a \neq 0$ のとき, $x = \frac{b}{a}$ (解がただ一つ存在する)
2: $a = 0, b = 0$ のとき, $x = t$ (t は任意の実数) (解が無数に存在する)

それでは, 3 変数の連立 1 次方程式

$$
\begin{aligned}
a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\
a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\
a_3x + b_3y + c_3z &= d_3
\end{aligned}
$$

の「解のパターン」はどれぐらいあるでしょうか? それを考える手始めとして, まず, 以下の例を解いてみてください. 方法は何でも構いません.

$$
(1)\begin{cases} x+y+z &= 1 \\ x-y+z &= 1 \\ x+y-z &= 1 \end{cases}
\qquad
(2)\begin{cases} x+y+z &= 1 \\ x-y+z &= 1 \\ x+3y+z &= 1 \end{cases}
$$

$$
(3)\begin{cases} x+y-z &= 1 \\ 2x+2y-2z &= 2 \\ 3x+3y-3z &= 3 \end{cases}
\qquad
(4)\begin{cases} 0x+0y+0z &= 0 \\ 0x+0y+0z &= 0 \\ 0x+0y+0z &= 0 \end{cases}
$$

解が存在する場合, 1 変数の場合よりもいろいろ解のパターンがありそうです. 上の 4 つは解のパターンのすべてでしょうか? そうだとしたら理由はなぜでしょうか? 最後の問いの答えは, 第 1 回の講義で一緒に学びましょう.