

ポアンカレ予想はいかにして解決されたか

小林 亮一

名古屋大学多元数理科学研究科

10月20日, 名古屋大学ホームカミングデー

- 19世紀前半：ガウス：内在的曲面論（等距離地図の不可能性）。ここで現代幾何学が誕生した。

- 19世紀中頃：リーマン：内在的曲面論からリーマン幾何へ。空間とは何か：局所的に座標 (x^1, \dots, x^n) が定義される空間で、計量テンソル $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$ (ベクトルの長さを測る2次式で、係数 g_{ij} は空間の点に依存する) が備わった空間。計量テンソルから、空間の曲がり具合を表す曲率テンソルが定義され、曲率テンソルが零であることと空間がユークリッド空間であることが同値になる。
- 地球の表面 (球面) の曲率テンソルは零でない。したがってユークリッド平面でない地球表面をユークリッド平面に距離、角度ともに忠実に展開することは不可能である。

- リーマン幾何では、空間の異なる場所にある図形のユークリッド幾何的な意味での比較ができない。ユークリッド空間では空間の異なる場所で図形を合同かどうか比較できるのに対し、リーマン多様体では空間の異なる場所で計量テンソルを比べたくても基準がないからである。空間の異なる場所で定義された幾何学的対象を比較するために平行移動という概念を定義することができるが、それは移動に使った経路に依存する（伊能忠敬の精密な日本地図が閉じなかったのはこのため）。

- 19世紀末から20世紀はじめにかけて幾何とは何かという問題を考えた数学者がクラインである。
- アイディア：空間の異なる場所にある図形を比較できる（図形の合同の概念が定義される）ために空間に備わっているべきものは何か？

クラインの幾何

- 答：(合同) 変換群.
- クラインの幾何：幾何とは，空間と変換群の組である．クラインの幾何はリーマン幾何の特別な場合.
- 例．平面に平行移動・回転・折り返しの合成からなる変換群が備わったもの = ユークリッド幾何． 回転行列

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

が平面に働いているのを想像すればよい.

- 2次元の幾何はユークリッド幾何だけではない．実は3種類あって，その3種類に限る．ユークリッド幾何，球面幾何，双曲幾何，
- すべての向き付け可能閉曲面（絵で説明）は3種類のいずれか1つの幾何の構造が入る：
種数 = 0：球面幾何.
種数 = 1：ユークリッド幾何．正方形から種数1の閉曲面を作る絵.
種数 ≥ 2 ：双曲幾何．双曲的正8角形から種数2の閉曲面を作る絵.

位相幾何学の問題意識 I

- 1860年代に始まった幾何学の新しい方向性. 位相幾何 = 定性的幾何.
1つの図形が連続的変形によってもう1つの図形に変換されたとき, これら2つの図形は位相的に同じとみなす数学.
- 位相的に同じ図形の例. 円周と正方形. ドーナツ面とコーヒーカップ.
- 位相的に違う図形の例. 円周と8の字. 注目すべき定性的な違い: 円周からどの1点を除いても円弧でつながった図形のままであるが, 8の字から2つの円周が接する点を除くと2つの円弧に分かれる.
- 位相的に違う図形の例. 直線と平面. 注目すべき定性的な違い: 直線から1点を除くと2つの半直線に分かれるが, 平面から1点を除いてもつながった図形である.
- 位相的に違う図形の例. 平面と空間. これをどう区別するか? 直線と平面と同様の素朴な直観がこの段階でもう有効でなくなる!
解決のためのアイデア (ポアンカレ): それぞれに1点を付け加えると2次元および3次元球面になる. これらを定性的に区別する指標としてホモロジー群とよばれるものがある. 次元の違う球面が位相的に違うことが分かる. これから平面と空間が位相的に違うことが分かる.

– 位相的に違う図形の例. 球面と浮き袋の表面. 球面ではどんなループも回収できる. 浮き袋では回収できないループがある. アイディア: 図形に基本群とよばれるものを対応させる. 基本群は空間に投げたループの回収できなさ加減を測る指標で, 基本群が異なる図形は位相的に違う.

位相幾何の誕生

- メビウス (1860 年代) 種数による閉曲面の分類
- ポアンカレ (クラインと同時代) の「位置解析」 (1890-1905)
 - ここで基本群の概念、ホモロジー群の概念が導入され、位相幾何学が誕生した。
- 基本群は閉曲面の種数による分類 (メビウス) を再現するには十分、基本群が自明な閉曲面は 2 次元球面である。
- しかし 3 次元では大きな困難に直面する！ ポアンカレ：位相幾何学の研究に高い将来性がある。位相幾何学という数学の誕生。
- 3 次元位相幾何学の至近のターゲット：基本群が自明な 3 次元閉多様体は 3 次元球面と位相的に異なり得るか？ (ポアンカレ予想)

位相幾何, リーマン幾何とクラインの幾何の関係 I

- 位相幾何の観点: 定性的 (連続変形で変換される幾何学的対象は同じ).
- リーマンおよびクラインの幾何の観点: 定量的 (形を重視する).
- 直観的イメージ: 柔らかい素材で作られた球面を空間内で変形する. 完全に丸いときはクラインの幾何であり, それを変形して歪ませたものはすべてリーマンの幾何である. 位相的にはすべて「同じ」と考える.

2次元の場合

- 閉曲面の位相的分類とクライン幾何的分類が一致する!
 - 種数 0 と球面幾何.
 - 種数 1 とユークリッド幾何.
 - 種数 ≥ 2 と双曲幾何).

3次元の場合

- 大問題: 3次元ではどうか?
- 部分問題: 3次元のクラインの幾何は何か?
- 答: サー斯顿: 3次元のクライン幾何は次の8種類である.
- 2次元のクライン幾何と1次元クライン幾何の積(3種類):
 - 2次元幾何と直線の積 $S^2 \times \mathbb{R}$.
 - 3次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^3 .
 - 2次元双曲幾何と直線の積 $H^2 \times \mathbb{R}$.
- 2次元のクライン幾何と1次元クライン幾何の積をねじったもの(3種類):
 - 3次元球面幾何 S^3 .
 - 冪零幾何.
 - $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$.
- 3次元特有の幾何(2種類):
 - 可解幾何.
 - 3次元双曲幾何 H^3 .

幾何化予想 (サー斯顿 1980)

すべての向きづけられた3次元閉多様体は, 8種類の幾何を持つピースに標準的に分解する.

- 標準的分解とは, 素因子分解 (連結和分解) とその既約成分 ($S^1 \times S^2$ 以外の成分) のトーラス分解のことである.
- 幾何化予想とポアンカレ予想の違い: ポアンカレ予想はごく特殊な条件を満たす3次元閉多様体はごく特殊な多様体とトポロジーが等しいことを主張する命題である. 一方, 幾何化予想は多様体に対する前提は何もなく, 3次元閉多様体のトポロジーの分類 (クライン幾何がトポロジーを分類すること) を主張する命題である.

- アイディア：3次元閉多様体上のリーマン計量 $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$ を整形してクラインの幾何にしてしまえ。
- 問：リーマン計量を変形するには何が必要か？ 答：リーマン計量に対する発展方程式. $g(t, x)$ を時間依存するリーマン計量とする. リーマン計量に対する発展方程式とは

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} = A_{ij}$$

の形の偏微分方程式である. 発見的考察：時間無限大でクラインの幾何になってほしい. 3次元リーマン計量が3次元特有のクラインの幾何（3次元ユークリッド幾何, 球面幾何または双曲幾何）になるための条件は g_{ij} から作られるリッチ曲率テンソル R_{ij} が g_{ij} に比例すること. そこで登場するのがリッチフロー

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} = -2R_{ij}$$

である. これは偏微分方程式論の観点からは弱放物型とよばれる悪くない形の方程式である.

- ハミルトン (1980 年代から 1990 年代) : リッチフローの解の存在, 最大値原理, 保存される正曲率条件, ハルナック不等式, リッチフローの大域解存在という条件のもとでの幾何化予想解決. これらの結果はすべて大変な力作である. なかでもハルナック不等式は特別な靈感が光臨したとしか思えない神秘性をたたえている.
- ペレルマン : ハミルトンプログラムに横たわっていた特異点の困難を解決した.
 - リッチフローに有限時間で現れる曲率無限大の特異点のに対する非局所崩壊定理 (これは一般次元で成り立ち, 幾何化予想の他にも幾何解析に与えたインパクトは大きい).
 - 3次元リッチフローに現れる曲率が大きい領域の構造に関する標準近傍定理.
 - 非局所崩壊定理と標準近傍定理とハルナック不等式を組み合わせると, 3次元リッチフロー解は手術つきリッチフローとして特異点を超えて存在する.

- ペレルマンは任意の3次元閉多様体上で任意のリーマン計量をとってリッチフローを考え、非局所崩壊定理と標準近傍定理とハルナック不等式を駆使して、有限時間で曲率無限大の特異点が現れたら適当な手術を行ってリッチフローの時間大域解を構成した。
- 非局所崩壊定理の証明は、リッチフローとそれに付随する共役熱方程式をいっしょに考えると、リッチフローの勾配流解釈ができるという観察にもとづく。
- 勾配流ということは、ある量が最も効率的に減る（または増える）方向に時間発展が起きるということである。このような量が「エントロピー」である。例えば熱方程式はボルツマンエントロピーの勾配流として解釈できる（ワッサーシュタイン幾何）。
- 勾配流には時間発展とともに単調に変化する「エントロピー」が対応し、それを逆向きリッチフローに適用する。曲率無限大の特異点で体積崩壊が起きると、そこから時間を遡るとエントロピーの単調性に矛盾する式が出てくる。よって有限時間で体積崩壊しないことが分かる。

Theorem (ペレルマン, 幾何化予想の解決)

3次元閉多様体上の手術つきリッチフローの時間大域解は有限時間で消滅する(球面幾何に対応する)か、時間無限大まで解が存在して、広部・狭部分解をひきおこす(後部と狭部は非圧縮的トーラス境界で接着している)。広部ではリッチフロー解が時間に比例するオーダーで膨張して(適当にスケールした後)時間無限大で双曲幾何に収束し、狭部では時間無限大で体積崩壊が起きる(そこに2次元幾何と直線の積またはそれをねじった幾何が入る)。広部・狭部分解が、幾何化予想に言う標準的分解である。

- ポアンカレ予想は幾何化予想の証明の系として結果的に証明できている。

- G. Perelman, “The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications”, math.DG/0211159.
- G. Perelman, “Ricci flow with surgery on three-manifolds”, math.DG/0303109.
- G. Perelman, “Finite extinction time for the solution to the Ricci flow on certain three-manifold, math.DG/0307245.
- 小林亮一, “リッチフローと幾何化予想”, 培風館 (2011).