教育研究プロジェクト：

# 代数幾何学的手法による微分方程式の研究

**代表者（提案者）**　梅村　浩

## テーマ

歴史的には, 解析学と代数幾何学は分離するのが難しい程関連していた. このプロジェクトでは主にPainlevé 方程式の代数的な視点からの研究と微分方程式の Galois 理論をとりあげる. Painlevé 方程式も微分方程式の Galois 理論も 19 世紀末から 20 世紀初頭にかけてさかんに研究された. その後 一時は忘却されていたが, 近年よみがえった主題である. Painlevé 方程式については 20 世紀の終りから著しい進展があった. 微分 Galois 理論については最近注目をあびるようになったばかりであり, 発展が期待される夢のある分野である.

## 1　プロジェクトの目的

### 1.1　背景

19 世紀に微分方程式と関連して知られていた特殊関数は次の二つであった.

1. 2 階の線型微分方程式で定義される Gauss の超幾何関数の仲間.
2. Weierstrass の $\wp$ 関数.

Weierstrass の $\wp$ 関数は次の微分方程式をみたす.

$$y'^2 = 4y^3 - g_2 y - g_3, \qquad g_2,\, g_3 \in \mathbf{C}. \tag{1}$$

19 世紀の数学者は新しい特殊関数を発見して, 数学の地平線を広げようと考えた. つまり, $\wp$ 関数のみたす微分方程式 (1) の一般化としてよい条件（＝動く特異点を持たない）代数微分方程式

$$y'' = F(t,\, y,\, y') \tag{2}$$

(ここで $F$ は $t,\, y,\, y'$ の有理関式) を研究すれば, Weierstrass の $\wp$ 関数を一般化する特殊関数が見つかるであろう．それどころか，当時はもっと楽観的で，微分方程式 (2) の次数をどんどん上げることにより，次々に特殊関数が発見できるであろうと考えられていた．

2 階の場合である（2) でさえこれは難しい問題であって，1900 年頃 Painlevé は微分方程式 (2) を分類するのに成功し，さらにそれらの中から知られた関数で積分できるものを捨て，6 個の Painlevé 方程式を得た．

「それでは果たしてこれら 6 個の Painlevé 方程式は新しい特殊関数を定義するのか.」という疑問が生じるが，そうであることが確信されるのに 100 年かかったと言ってよい．

もう一つのテーマは無限次元微分 Galois 理論である．19 世紀に S. Lie は，Galois と Abel の理論を微分方程式に打ち立てられたらと考えた．つまり，微分方程式の Galois 理論の夢を抱いた．この理論は本質的に無限次元である．彼は Lie 群論，Lie 環論を有限次元の場合から創り始めなければならなかった．

次のように考えれば, 微分方程式の Galois 理論の重要性は容易に推察できるであろう．Galois 理論を学ぶときに知るように, 代数方程式の Galois 理論は一般の 5 次方程式を加減乗除と根号で解くのが不可能であることを証明し歴史的な問題に終止符をうった．しかし, Galois 理論がその力を発揮したのはその後の整数論においてである．微分方程式の Galois 理論も微分方程式論においてこのような働きをするものと期待される．

有限次元の場合は微分 Galois 理論が, Picard, Vessiot, Kolchin によって創られた．19 世紀の終わりに，J. Drach は初めての無限次元微分 Galois 理論の試みを行った．しかし，この論文は不完全な定義, ギャップのある証明を含む問題作であった．1904 年から始まる Vessiot の仕事で，彼は無限次元 Galois 理論を完全なものにしようとした．無限次元微分 Galois 理論自体はその後忘れられてしまう．今から 10 年程前に私は Vessiot の 1944 年のアイディアからヒントを得て新しい無限次元微分 Galois 理論を提唱した．近年 B. Malgrange は別の無限次元微分 Galois 理論を提案している．私の理論と Malgrange 理論との関係ははっきりせず, 今後の発展に待つところである．

### 1.2　目的・内容

具体的な内容は以下の (a), (b) である．

(a) Painlevé 方程式と組み合わせ理論

Painlevé 方程式が特殊関数を定義すると認められた決定的な理由は，それが組み合わせ理論と本質的に関係する事実の発見である．この点に関係して最近 Painlevé 方程式と多変数の超幾何関数，直交多項式，Selberg 積分の関係が注目されている．この方面の開拓は実り多いものと思われる．

(b) 無限次元 Galois 理論の整備

私の提唱している無限次元微分 Galois 理論については成すべきことが多い．例えば，私の理論と Malgrange の理論との関係を明らかにすることがある．そのためには理論の基礎的な部分が十分用意されていない．微分環の特殊化と Galois 群の関係，無限次元形式群に関する部分などがあげられる．19 世紀の終りから今世紀の初めに書かれた理解が難しいとされる J. Drach, E. Vessiot の全論文を私の理論から見直す必要もある．

## 2　参加する大学院生に求められる知識

Level 1 の知識がしっかり身についていることが大切である．しかし身につけた知識が少なくても, 何かが必要になったとき素速くそれが調達できる力があればよい．

次の予備知識があれば非常に楽にスタートできるであろう．

1. Lie 環論の初歩 (Humphreys:Introduction to Lie algebra . . . の Chap.I Basic notions),
2. 代数幾何学の基礎的な知識 (Shafarevich: Basic Algebraic Geometry の Chap.I Basic notions)
3. 野海 正俊:パンルベ方程式,

4. ソリトン理論

5. 超幾何関数論

6. 楕円関数論

これらすべてを大学院前期課程までにマスターするのは不可能である．本研究科の基本方針にしたがって, 多くの分野に関心をもって学部, 修士時代を過ごすことが大切である.

## 3　教育研究課程

数学の理解は, 禅における悟りのように絶対的ではあるが完全に個人的な体験であるかもしれないが, 絶海の孤島は数学の研究にとってよい場所かといえばそうではない. それどころか悪い環境であると断言できる．つねに仲間がいて, 一緒に講義を聴いたり, 議論をしたりすることが不可欠である．とくに自分の考えを分かりやすく他人に伝えることと他人の話に興味を持つことが大切である.

プロジェクトは幅が広いので, 修士課程で身につけた知識も様々であろう．代数幾何学, 幾何学, 代数学, 数理物理学, 楕円関数論, 超幾何関数論等をそれぞれ軸にして修士課程を送ってきたものがいるであろう．各自が各々の知識を生かして, お互いに助けあいながら上に挙げたような著作で勉強して基礎を固める.

研究のテーマを見つけるのにはその人の個性が光る．理論のなかに何とも言えない不自然さ, 居心地の悪さを感じたらそこに問題があるはずである.

どのような問題が考えられるか

1. 多変数超幾何関数，特に直交多項式を理解するしくみとしての Painlevé 方程式を解釈する．直交多項式の Selberg 積分表示．これらの q-類似の追求.

2. 微分方程式の特殊化と Galois 群の振る舞い.

3. Lie 擬群の理論の形式群論からの見直し.

4. Malgrange の無限次元微分 Galois 理論と私の無限次元微分 Galois 理論との比較.

5. 無限次元微分 Galois 群の計算できる自明でない例をつくること.

6. Galois 理論から見たモノドロミー保存変形.

7. J. Drach の仕事の見直し．J. Drach は無限次元微分 Galois 理論について沢山の論文を残している．しかしその大部分は解読されていない．彼の残した，あるいは予測したといった方がよいかもしれない，結果に反例を上げるのはしばしば容易である．しかしこれは生産的なことではない．彼の論文から肯定的な結果を引き出してこそ意味がある.

8. Painlevé 方程式の Galois 群の計算.

## 4　研究交流

Galois 理論に関して Cartier(IHES), Ramis(Toulouse), Bertrand(Paris), Malgrange (Grenoble), Mitchi(Strasbourg), Pillay(Chicago) と研究交流をしている．日本は Painlevé 方程式に関して先進国であり，東大の岡本, 坂井, 神戸大学グループ，高野, 野海，山田，斎藤, 太田， 増田，九州大学の岩崎と盛んに研究交流している.

## 5　関連する本研究科のメンバー

土屋 昭博（数理物理学），浪川 幸彦 （モジュライ空間のコンパクト化），庄司 俊明（表現論），金銅 誠之（保型形式とモジュライ），岡田 聡一（組み合わせ論），落合 啓之（表現論）.

## 6　将来への展望

研究教育課程を通して, 数理科学の専門家としての数学の基礎知識, 研究対象の見つけ方, 対象へのアプローチの仕方を身につけることができるであろう．これらの能力を身につけて人は大学のみならず, 企業, 教育の場で重要な人材となるであろう．Painlevé 方程式の研究においては計算機の使用が必要不可欠になっているので, 研究の方法によっては巧みに計算機を使える能力を上げることができよう．アカデミックなキャリアーをめざす人は学振に応募し海外で研鑽を続け専門の知識を生かせる職場を広い視点で探す.

## 7　プロジェクトと提案者自身の研究との関係

提案者は代数幾何学の研究から出発した．ある時点から古典に興味を持つようになった．まず代数幾何学のイタリア学派の G. Fano の 3 次元クレモナ群の極大有限次元部分群の分類の仕事を現代化した. G. Fano のこの仕事も Lie のアイディアにヒントを得たものであった.

その後 Painlevé の Stockholm 講義録を研究し, Painlevé 方程式の還元不能性 (Painlevé 方程式が従来知られた関数で解けないこと) を証明した．問題が多いと言われる Drach の無限次元微分 Galois 理論の仕事を理解しようとした．Vessiot の仕事からヒントを得て, 10 年程前に現代的な新しい無限次元微分 Galois 理論を提案した．この理論は発表後日本ではほとんど注目されなかったが, 最近フランスを中心に Malgrange, Cartier をはじめ興味を持つ人が少しづつふえている.