2019年度修了テスト 2019年7月24日実施

試験について

1. 試験終了時刻は黒板に記載する．
2. 座席表に従って着席し，学生証を机に出しておくこと．
3. 途中退室は試験開始後 90 分経過してから許可する．
4. 問題用紙：1 枚・答案用紙：4 枚・草稿用紙：4 枚．
5. 答案用紙の追加は認めない．
6. 答案用紙のみを回収する．
7. 各問 30 点満点の計 120 点満点であり，90 点以上を合格とする．
8. 不正行為は決してしないこと．
9. 携帯電話の電源は切っておくこと．

答案作成についての注意事項

1. 全ての答案用紙の左上に問題番号を，右上に学生番号と氏名を記入すること．
2. 答案は各問題について一枚を使用すること．
3. 答案用紙の裏面を使用してもよい．表面の最下行にその旨を明記すること．
4. 数学的論証の表現力も採点対象である．**いきなり答案用紙に書くのではなく， 草稿用紙でよく練ってから解答を書くこと．**
5. 解答者の理解の正確さを示すことがこのテストの目的である．論証においては「明らかに」という表現は避け，要点を的確に記すこと．
6. もしも途中に解けない小問があっても，その結果を認めて後続の小問を解いてよい．

試験後の注意事項

1. 合否は 7 月 29 日から多元数理科学研究科教育研究支援室にて確認できる．
2. 不合格のときは 2020 年度予備テストを受験せねばならない．

2019 年度修了テスト

$\boxed{1}$ 関数 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ を

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^3}{x^2+y^2}\cos\Bigl(\dfrac{1}{x}\Bigr), & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

と定める．このとき，次の問に答えよ．

(1) 関数 $f(x,y)$ の原点 $(0,0)$ での偏微分係数 $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$ を求めよ．

(2) 次の式を満たす実数 A,B が存在することを示せ:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-Ax-By}{\sqrt{x^2+y^2}}=0.$$

(3) 任意の実数 $t\neq 0$ に対して $f_x(t,t)$ を求めよ．

(4) 偏導関数 $f_x(x,y)$ は原点で連続ではないことを示せ．

$\boxed{2}$ 実数を成分とする三次正方行列 A は $A^3+A=O$ を満たすとする．このとき, 次の問に答えよ．

(1) A の固有値は 0, i, $-i$ のいずれかであることを示せ．ただし i は虚数単位とする．

(2) i が A の固有値ならば $-i$ も A の固有値であることを示せ．

(3) A の固有値が 0 だけのとき, A の ジョルダン標準形を考察することで, $A=O$ を示せ．

$\boxed{3}$ 非負実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ があって, 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は収束するとする．このとき, 次の問に答えよ．

(1) 任意の $x\in\mathbb{R}$ に対して, 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin(nx)$ が収束することを示せ．

(2) $\mathbb{R}$ 上の関数の列 $f_N(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{N}a_n\sin(nx)$ $(N=1,2,\cdots)$ は関数 $f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin(nx)$ に $\mathbb{R}$ 上で一様収束することを示せ．

(3) 一般に, 有界閉区間 $[a,b]$ $(a<b)$ 上の連続関数の列 $\phi_N(x)$ $(N=1,2,\cdots)$ が関数 ϕ に一様収束するとき

$$\lim_{N\to\infty}\int_a^b\phi_N(x)\,dx=\int_a^b\phi(x)\,dx$$

が成り立つことを示せ．ただし, ϕ が連続であり, したがって $[a,b]$ 上で可積分であることは証明なしで用いてよい．

(4) 次の式を示せ:

$$\int_0^{\pi}f(x)\,dx=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{2n-1}}{2n-1}.$$

$\boxed{4}$ 実数を成分とする $m\times n$ 行列 A に対して, 線形写像 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ を $v\mapsto Av$ により定める．$r:=\operatorname{rank}A$ とすれば, 行列 A を構成する列ベクトル $a_1,\ldots,a_n$ から r 個の一次独立なベクトル $a_{i_1},\ldots,a_{i_r}$ が選べる．

$\mathbb{R}^n$ の基本ベクトルを $e_1,\ldots,e_n$ として, $\operatorname{Ker}f$ の基底を $v_1,\ldots,v_p$ とする．このとき, 次の問に答えよ:

(1) $e_{i_1},\ldots,e_{i_r},v_1,\ldots,v_p$ は一次独立であることを示せ．

(2) $i\neq i_1,\ldots,i_r$ ならば, a_i は $a_{i_1},\ldots,a_{i_r}$ の一次結合で表せることを示せ．

(3) 任意の $v\in\mathbb{R}^n$ は $e_{i_1},\ldots,e_{i_r},v_1,\ldots,v_p$ の一次結合で表せることを示せ．