2018 年度修了テスト

(2018 年 7 月 28 日 (土))

試験に関する注意事項

(1) 試験時間 (3 時間) は黒板に記載する.

(2) 試験開始後, 1 時間半経過するまでは中途退出してはいけない.

(3) 問題用紙は両面 1 枚, 答案用紙は 4 枚, 草稿用紙は 4 枚である. そのうち, 答案用紙のみを回収する. 他は持ち帰ること.

(4) 各問 30 点満点, 計 120 点満点とし, 90 点以上を合格とする.

(5) リラックスして自分の現在の力を十分に発揮すること. また, 不正行為は決してしないこと.

(6) 携帯電話の電源は切っておくこと.

答案作成に関する注意事項

(1) 各答案用紙の左上に問題番号, 右上に学生番号, 氏名を記入すること.

(2) 答案は問題毎 (原則として 1 枚以内) に作成すること.

(3) 裏面を使用するときは, 表面の最後にその旨を明記すること.

(4) 数学的論証の表現力も採点対象とする. いきなり答案用紙に書くのではなく, 草稿用紙でよく練ってから解答を書くこと.

(5) あなたが正確に理解しているかを示してもらうことがこのテストの目的であるので, 論証においては「明らかに」という表現は避け, 論証の要点を的確に記すこと. また, 解の導出においては導出過程の要点を的確に記すこと.

(6) もし途中に解けない小問があっても, その結果を認めて後続の小問を解いて構わない.

試験後の注意事項

(1) 合否については, 8 月 1 日 (水) 10:00 より多元数理科学研究科教育研究支援室にて確認することができる. 答案の返却も教育研究支援室にて同時に行う.

(2) 不合格となってしまった場合, 2019 年度の予備テストを受験する必要がある. 予備テストは 2019 年 4 月に行われるので, 不合格者は必ず受験すること.

$\boxed{1}$ $\|\cdot\|$ を $\mathbb{R}^k$ のユークリッドノルムとする．$P \in \mathbb{R}^k$ と実数 $\delta > 0$ に対し，$B(P,\delta) := \{Q \in \mathbb{R}^k \,|\, \|Q-P\| < \delta\}$ とおく．$U \subset \mathbb{R}^k$ が開集合であるとは, 任意の点 $P \in U$ に対しある $\delta > 0$ が存在して $B(P,\delta) \subset U$ が成り立つときをいい，開集合の補集合を閉集合という．関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ のグラフを $G_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y = f(x)\}$ で定義する．

(1) 「$x, y \in \mathbb{R}$, 実数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ かつ $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = y$ ならば $f(x) = y$」が常に成り立つことは, $G_f \subset \mathbb{R}^2$ が閉集合であることと同値であることを示せ.

(2) f が連続ならば G_f は $\mathbb{R}^2$ の閉集合であることを示せ.

(3) G_f が $\mathbb{R}^2$ の閉集合であっても f は連続とは限らないことを次の例で確かめよ:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & (x \neq 0), \\ 0 & (x = 0). \end{cases}$$

$\boxed{2}$ $-\infty < a < b < \infty$ に対して $I = (a,b)$ とする. 以下の問いに答えよ.

(1) $\overline{I} = \Big\{x \in \mathbb{R} \,\Big|\,$ 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n \in I$ かつ $\lim_{n\to\infty} a_n = x$ となるような数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在する $\Big\}$

としたとき, $\overline{I} = [a,b]$ であることを, 以下に従って示せ.

(i) $[a,b] \subset \overline{I}$ を示せ.

(ii) $\overline{I} \subset [a,b]$ を, $x_0 \in \overline{I}$ かつ $x_0 \notin [a,b]$ なる x_0 が存在すると仮定して, 矛盾を導くことにより示せ.

(2) $A \subset \mathbb{R}$ 上で定義された関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $f:\ A \to \mathbb{R}$ へ A 上一様収束することと,

「任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在し, $n \geq N$ なるすべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $\sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ が成り立つ」

ことは同値であることを示せ.

ただし, $A \subset \mathbb{R}$ 上で定義された関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $f:\ A \to \mathbb{R}$ へ A 上一様収束するとは,

「任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在し, $n \geq N$ なるすべての $n \in \mathbb{N}$ とすべての $x \in A$ に対して $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ が成り立つ」

ことである.

(3) $\overline{I}$ 上で定義された, 連続関数列 $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ および連続関数 g を考える. $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ が g に I 上一様収束するとき, $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ は g に $\overline{I}$ 上一様収束することを示せ.

((2) より, h を $\overline{I}$ 上の連続関数とするとき, $\sup_{x \in I} h(x) = \sup_{x \in \overline{I}} h(x)$ を示せばよい.)

$\boxed{3}$ V を $\mathbb{C}$ 上の有限次元ベクトル空間とし, $f : V \longrightarrow V$ を V の線形変換で

$$\dim(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f) = \dim \operatorname{Im}(f \circ f - 3f) = 1$$

となるものとする. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f \subseteqq \operatorname{Im}(f \circ f - 3f)$ であることを示せ.

(2) $f \circ f \circ f = 3f \circ f$ であることを示せ.

(3) $\dim V = 4$ のとき f のジョルダン標準形となり得るものを全て求めよ. 但しジョルダン標準形を 1 つ書けば, それと相似なもの, つまりジョルダン細胞を入れ替えただけのものについては書かなくてよい.

$\boxed{4}$ $\mathbb{C}$ 上の有限次元ベクトル空間 V と線形変換 $T : V \to V$ を考える.

(1) T の固有値 $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して,

$$E(\lambda, T) := \{v \in V \mid Tv = \lambda v\}$$

とするとき, $E(\lambda, T)$ は V の部分空間であることを示せ.

(2) 線形変換 T の相異なる固有値を $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ とするとき,

$$E(\lambda_1, T) + \cdots + E(\lambda_m, T)$$

は直和であることを示せ.

(3) 不等式 $\dim E(\lambda_1, T) + \cdots + \dim E(\lambda_m, T) \leq \dim V$ を示せ.

(4) T に零固有値はないとする. このとき, 不等式

$$\dim E(\lambda_1, T) + \cdots + \dim E(\lambda_m, T) \leq \dim \operatorname{Im} T$$

を示せ.