

2015 年度修了テスト

(2015 年 7 月 29 日(水))

試験に関する注意事項

- (1) 試験時間(3時間)は黒板に記載する。
- (2) 試験開始後, 1 時間半経過するまでは中途退出してはいけない。
- (3) 問題用紙は両面 1 枚, 答案用紙は 4 枚, 草稿用紙は 4 枚である。そのうち, 答案用紙のみを回収する。他は持ち帰ること。
- (4) 各問 30 点満点, 計 120 点満点とし, 90 点以上を合格とする。
- (5) リラックスして自分の現在の力を十分に発揮すること。また, 不正行為は決してしないこと。
- (6) 携帯電話の電源は切っておくこと。

答案作成に関する注意事項

- (1) 各答案用紙の左上に問題番号, 右上に学生番号, 氏名を記入すること。
- (2) 答案は問題毎(原則として 1 枚以内)に作成すること。
- (3) 裏面を使用するときは, 表面の最後にその旨を明記すること。
- (4) 数学的論証の表現力も採点対象とする。いきなり答案用紙に書くのではなく, 草稿用紙でよく練ってから解答を書くこと。
- (5) あなたが正確に理解しているかを示してもらうことがこのテストの目的であるので, 論証においては「明らかに」という表現は避け, 論証の要点を的確に記すこと。また, 解の導出においては導出過程の要点を的確に記すこと。
- (6) もし途中で解けない小問があっても, その結果を認めて後続の小問を解いて構わない。

試験後の注意事項

- (1) 合否については, 8 月 3 日(月) 10:00 より多元数理科学研究科教育研究支援室にて確認することができる。答案の返却も教育研究支援室にて同時に行う。
- (2) 不合格となってしまった場合, 2016 年度の予備テストを受験する必要がある。予備テストは 2016 年 4 月に行われるので, 不合格者は必ず受験すること。

1 ユークリッド空間の通常距離と位相に関する以下の問いに答えよ. ただし, n は自然数とする.

(1) n 次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^n の部分集合 A に対して, その内部, 外部, 境界の定義を述べよ. また, それらの用語を用いて, \mathbb{R}^n の部分集合が開集合であることと閉集合であることの定義をそれぞれ述べよ.

(2) \mathbb{R}^2 の部分集合

$$B = \left\{ \left(x, \sin \frac{1}{x} \right) \mid 0 < x \leq \frac{1}{2\pi} \right\}$$

の閉包 (= 内部と境界の和集合) が

$$B \cup \{(0, y) \mid -1 \leq y \leq 1\}$$

で与えられることを示せ.

(3) \mathbb{R}^n の空でない部分集合 C が与えられ, 点 $x \in \mathbb{R}^n$ に対し

$$d(x) = \inf_{y \in C} \|x - y\|$$

とおくとき, \mathbb{R}^n の任意の二点 x_1, x_2 に対して $|d(x_1) - d(x_2)| \leq \|x_1 - x_2\|$ が成り立つことを示せ. ただし, $\|\cdot\|$ はユークリッドノルムを表し, $|\cdot|$ は絶対値を表す.

2 以下, I を开区間 $(-1, 1)$ とし, 関数は全て I 上で定義されているものとする. 以下の問いに答えよ.

(1) 連続関数列 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ が I 上で f に一様収束していると仮定する. このとき, 積分値も収束すること, すなわち, $-1 < a < b < 1$ に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

が成り立つことを $\epsilon - N$ 論法で示せ. (注意: 連続関数列の一様収束極限として f は連続関数となる. したがって上式右辺の f の積分は存在する.)

(2) I 上の C^1 級の関数列 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ が C^1 級関数 f に一様収束しても $\{f'_n\}_{n=1}^\infty$ が f' に各点収束するとは限らないことを次の例で確かめよ:

$$f(x) = 0, \quad f_n(x) = \frac{\sin nx}{n} \quad (x \in I).$$

(3) I 上の C^1 級の関数列 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ が C^1 級関数 f に各点収束し, かつ $\{f'_n\}_{n=1}^\infty$ が連続関数 g に一様収束すれば, $f' = g$ となることを示せ.

3 V を体 K 上の有限次元ベクトル空間とし, V から K への線形写像全体の集合を V^* で表す. $\varphi, \psi \in V^*$, $a \in K$ に対して, 和 $\varphi + \psi \in V^*$, スカラー倍 $a\varphi \in V^*$ を

$$(\varphi + \psi)(v) = \varphi(v) + \psi(v), \quad (a\varphi)(v) = a(\varphi(v)) \quad (v \in V)$$

と定めることにより, V^* はベクトル空間となる.

以下, U, V を体 K 上の有限次元ベクトル空間, $f : U \rightarrow V$ を線形写像とし, 写像 $f^* : V^* \rightarrow U^*$ を

$$(f^*(\varphi))(u) = \varphi(f(u)) \quad (\varphi \in V^*, u \in U)$$

によって定義する. 以下の問いに答えよ.

- (1) $f^*(\varphi)$ が実際に U^* の元であること, すなわち, $f^*(\varphi) : U \rightarrow K$ が線形写像であることを示せ.
- (2) f^* は線形写像であることを示せ.
- (3) f が全射ならば, f^* は単射になることを証明せよ.

4 V を \mathbb{C} 上の $\{0\}$ でない有限次元ベクトル空間とし, 線形変換 $f : V \rightarrow V$ が

$$\text{Ker } f = \text{Im } f$$

を満たしているとする. このとき以下の問いに答えよ.

- (1) $\text{Ker } f \neq \{0\}$ かつ $\text{Im } f \neq V$ を示せ.
- (2) $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ を $\text{Im } f$ の基底とする. $f(\mathbf{w}_i) = \mathbf{v}_i$ ($i = 1, \dots, n$) を満たす V のベクトル $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n$ をとると, $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n$ は 1 次独立であることを示せ.
- (3) (2) における $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n$ は V の基底であることを示し, またこの基底に関する f の表現行列を求めよ.