2014 年度修了テスト

(2014 年 7 月 23 日 (水))

試験に関する注意事項

(1) 試験時間 (3 時間) は黒板に記載する.
(2) 試験開始後, 1 時間半経過するまでは中途退出してはいけない.
(3) 問題用紙は両面 1 枚, 答案用紙は 4 枚, 草稿用紙は 4 枚である. そのうち, 答案用紙のみを回収する. 他は持ち帰ること.
(4) 各問 30 点満点, 計 120 点満点とし, 90 点以上を合格とする.
(5) リラックスして自分の現在の力を十分に発揮すること. また, 不正行為は決してしないこと.
(6) 携帯電話の電源は切っておくこと.

答案作成に関する注意事項

(1) 各答案用紙の左上に問題番号, 右上に学生番号, 氏名を記入すること.
(2) 答案は問題毎 (原則として 1 枚以内) に作成すること.
(3) 裏面を使用するときは, 表面の最後にその旨を明記すること.
(4) 数学的論証の表現力も採点対象とする. いきなり答案用紙に書くのではなく, 草稿用紙でよく練ってから解答を書くこと.
(5) あなたが正確に理解しているかを示してもらうことがこのテストの目的であるので, 論証においては「明らかに」という表現は避け, 論証の要点を的確に記すこと. また, 解の導出においては導出過程の要点を的確に記すこと.
(6) もし途中に解けない小問があっても, その結果を認めて後続の小問を解いて構わない.

試験後の注意事項

(1) 合否については, 7 月 28 日 (月) 10:00 より多元数理科学研究科教育研究支援室にて確認することができる. 答案の返却も教育研究支援室にて同時に行う.
(2) 不合格となってしまった場合, 2015 年度の予備テストを受験する必要がある. 予備テストは 2015 年 4 月に行われるので, 不合格者は必ず受験すること.

$\boxed{1}$ $\mathbb{R}^2$ 上で定義された関数

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2}\cos\dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

について, 以下の問いに答えよ.

(1) 関数 $f(x,y)$ は原点において偏微分可能であることを示せ. また その偏微分係数 $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$ も求めよ.

(2) 関数 $f(x,y)$ に対して,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - Ax - By}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

となる定数 A, B が存在することを示せ.

(3) $t \neq 0$ のときの $f_x(t,t)$ を求めよ. その結果を用いて x に関する偏導関数 $f_x(x,y)$ が原点で連続でないことを示せ.

$\boxed{2}$ $\mathbb{R}^2$ 上の関数

$$f(x,y) = (4x^2 + 2y^2 + 1)e^{-x^2-y^2}$$

について, 以下の問いに答えよ.

(1) 臨界点, つまり $\dfrac{\partial}{\partial x}f(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial y}f(x,y) = 0$ となる点をすべて求めよ.

(2) (1) で求めた点について, それぞれ極大値, 極小値であるか答えよ.

(3) (2) で求めた極大値は実は $f(x,y)$ の最大値になっている. これを証明せよ. ただし, 「有界閉集合上の連続関数は必ず最大値を持つ」という命題は証明無しに用いてもよい.

$\boxed{3}$ V, W を実ベクトル空間 $\mathbb{R}^N$ の部分空間とする. このとき, 和 $V+W$ および交わり $V \cap W$ も $\mathbb{R}^N$ の部分空間となり, 公式

$$(*) \quad \dim(V+W) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W)$$

が成立する. 以下, この公式を証明しよう. $\mathbb{R}^N$ の元 $u_1, \ldots, u_l, v_1, \ldots, v_r, w_1, \ldots, w_s$ を

- $u_1, \ldots, u_l$ は $V \cap W$ の基底
- $u_1, \ldots, u_l, v_1, \ldots, v_r$ は V の基底
- $u_1, \ldots, u_l, w_1, \ldots, w_s$ は W の基底

となるように選ぶとき, 次の二つの主張 (ア), (イ) が成り立つ:

(ア) $V+W$ の任意の元 x は, $u_1, \ldots, u_l, v_1, \ldots, v_r, w_1, \ldots, w_s$ の線形結合で表される.

(イ) $u_1, \ldots, u_l, v_1, \ldots, v_r, w_1, \ldots, w_s$ は 1 次独立である.

この (ア), (イ) より, $u_1, \ldots, u_l, v_1, \ldots, v_r, w_1, \ldots, w_s$ は $V+W$ の基底をなすことが分かり, 公式 $(*)$ が得られる. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) 上の主張 (ア), (イ) をそれぞれ証明せよ.

(2) $V \cup W$ は必ずしも $\mathbb{R}^N$ の部分空間とはならないことを $N=2$ の場合に例をあげて説明せよ.

$\boxed{4}$ A は $\mathbb{C}$ 上の 3 次正方行列で, 単位行列を E として $A^3 = E$ をみたすものとする.

(1) A の固有値は $1, \omega, \bar{\omega}$ のいずれかであることを示せ. ただし i を虚数単位として $\omega = \dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$ であり, また複素数 z と共役な複素数を $\bar{z}$ とする.

(2) A のジョルダン標準形として可能なものをすべて考えるとき, ジョルダン細胞の次数 n のうち最大のものを求めよ.

(3) A の成分がすべて実数であるとき，$\omega, \bar{\omega}$ のうちの一方が A の固有値ならば, 他の一方も A の固有値であることを示せ.