

# 2009 年度修了テスト

## (2009 年 7 月 29 日(水))

### 試験に関する注意事項

- (1) 試験時間(3時間)は黒板に記載する.
- (2) 試験開始後, 1 時間半経過するまでは中途退出してはいけない.
- (3) 問題用紙は両面 1 枚, 答案用紙は 4 枚, 草稿用紙は 4 枚である. そのうち, 答案用紙のみを回収する. 他は持ち帰ること.
- (4) 各問 30 点満点, 計 120 点満点とし, 90 点以上を合格とする.
- (5) リラックスして自分の現在の力を十分に発揮すること. また, 不正行為は決してしないこと.
- (6) 携帯電話の電源は切っておくこと.

### 答案作成に関する注意事項

- (1) 各答案用紙の左上に問題番号, 右上に学生番号, 氏名を記入すること.
- (2) 答案は問題毎(原則として 1 枚以内)に作成すること.
- (3) 裏面を使用するときは, 表面の最後にその旨を明記すること.
- (4) 数学的論証の表現力も採点対象とする. いきなり答案用紙に書くのではなく, 草稿用紙でよく練ってから解答を書くこと.
- (5) あなたが正確に理解しているかを示してもらうことがこのテストの目的であるので, 論証においては「明らかに」という表現は避け, 論証の要点を的確に記すこと. また, 解の導出においては導出過程の要点を的確に記すこと.
- (6) もし途中で解けない小問があっても, その結果を認めて後続の小問を解いて構わない.

### 試験後の注意事項

合否の通知と答案の返却は 7 月 31 日(金) 13:00 より教育研究支援室にて行う.



- 1 数列  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  が有界である (すなわち, ある正数  $M$  が存在して, 任意の  $n$  に対して  $|a_n| < M$  が成り立つ) とし, ベキ級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

を考える. 以下の問いに答えよ.

- (1)  $|x| < 1$  となる実数  $x$  について級数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  は絶対収束することを示せ.

- (2) 开区間  $(-1, 1)$  上の関数  $f_N$  ( $N = 1, 2, \dots$ ) および  $f$  を

$$f_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n x^n, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (|x| < 1)$$

によって定める. このとき  $|x| < 1$  において

$$|f_N(x) - f(x)| \leq \frac{M|x|^{N+1}}{1 - |x|}$$

であることを示し, これを用いて  $0 < R < 1$  となる任意の  $R$  に対して, 閉区間  $[-R, R]$  上で  $f_N$  は  $f$  に一様収束することを示せ.

- (3) 関数  $f$  は开区間  $(-1, 1)$  上で連続であることを示せ.

(ヒント: ある区間上で連続関数の列が関数に一様収束するとき, その区間で極限の関数も連続であることは証明せずに用いてよい. また, 多項式関数は連続であるということも証明せずに用いてよい.)

- 2  $a > b > 0$  を満たす定数  $a, b$  に対し,  $\mathbb{R}^2$  上の関数

$$f(x, y) = (ax^2 + by^2)e^{-x^2 - y^2}$$

を定義する. 以下の問いに答えよ.

- (1)  $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = 0$  となる点を全て求めよ.

- (2)  $f(x, y)$  の極大値, 極小値およびそれらを与える点を全て求めよ.

- (3) (2) で求めた  $f(x, y)$  の極大値は実は最大値になっている. これを証明せよ. ただし, 「有界閉集合上の連続関数は必ず最大値を持つ」という命題は証明せずに用いてよい.

3 実数を成分に持つ  $m \times n$  行列  $A$  で定義される線形写像  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  ( $v \mapsto Av$ ) に対して, 等式

$$(*) \quad n = \text{rank } A + \dim \text{Ker } f$$

が成り立つことが知られている. 以下ではこの事実を確認しよう.

$e_1, \dots, e_n$  を  $\mathbb{R}^n$  の基本ベクトルとし,  $v_1, \dots, v_p$  を  $\text{Ker } f$  の基底とする. 行列  $A$  の列ベクトルを  $a_1, \dots, a_n$  とし,  $r = \text{rank } A$  とおく.  $\text{rank } A$  は  $A$  の列ベクトルのうち 1 次独立なものの最大個数であるから,  $a_1, \dots, a_n$  の中から  $r$  個の 1 次独立なベクトル

$$a_{i_1}, \dots, a_{i_r} \quad (1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n)$$

を選ぶことができる. このとき以下のことを示せ (これにより,  $(*)$  は証明される).

- (1)  $e_{i_1}, \dots, e_{i_r}, v_1, \dots, v_p \in \mathbb{R}^n$  は 1 次独立である.
- (2)  $i_1, \dots, i_r$  のどれとも異なる  $i$  に対して,  $a_i$  は  $a_{i_1}, \dots, a_{i_r}$  の 1 次結合で表すことができる.
- (3) 任意の  $v \in \mathbb{R}^n$  は  $e_{i_1}, \dots, e_{i_r}, v_1, \dots, v_p$  の 1 次結合で表される.

4 2 次以下の実数係数多項式  $f(x)$  全体のなすベクトル空間

$$V = \{a + bx + cx^2 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

を考える.  $\alpha$  を実数定数とし, 線形変換  $T: V \rightarrow V$  を

$$f(x) \mapsto f(x + \alpha)$$

という対応によって定める. 以下の問いに答えよ.

- (1) 1 次以下の実数係数多項式  $g(x)$  全体のなす部分空間

$$W = \{a + bx \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

は  $T$  によって不変である ( $W$  の任意の元を  $T$  でうつしたものは  $W$  に属する) ことを示せ.

- (2)  $V$  の基底  $\{1, x, x^2\}$  に関する  $T$  の表現行列を求めよ.
- (3)  $T$  の固有値をすべて求めよ.

(ヒント: 固有値は基底の取り方によらないので, (2) の結果を用いるとよい.)