2021年度予備テスト

(2021年4月7日実施)

試験について

1. 試験終了時刻は黒板に記載する．
2. 座席表に従って着席し，学生証を机に出しておくこと．
3. 途中退室は試験開始後 90 分経過してから許可する．
4. 問題用紙 1 枚，答案用紙 4 枚，草稿用紙 4 枚．
5. 答案用紙の追加は認めない．
6. 答案用紙のみを回収する．
7. 各問 3 点満点の計 12 点満点であり，9 点以上を合格とする．
8. 不正行為は決してしないこと．
9. 携帯電話の電源は切っておくこと．
10. 水分補給時を除きマスクを着用し，感染症対策に留意すること．
11. 体調が悪くなった場合は，速やかに申し出ること．

答案作成についての注意事項

1. 全ての答案用紙の左上に問題番号を，右上に学生番号と氏名を記入すること．
2. 答案は各問題について一枚を使用すること．
3. 答案用紙の裏面を使用してもよい．表面の最下行にその旨を明記すること．
4. 数学的論証の表現力も採点対象である．**いきなり答案用紙に書くのではなく，草稿用紙でよく練ってから解答を書くこと．**
5. 解答者の理解の正確さを示すことがこのテストの目的である．論証においては「明らかに」という表現は避け，要点を的確に記すこと．
6. もしも途中に解けない小問があっても，その結果を認めて後続の小問を解いてよい．

試験後の注意事項

1. 合否は 4 月 9 日から多元数理科学研究科教育研究支援室にて確認できる．
2. 不合格のときは基礎演習クラスを受講せねばならない．基礎演習クラスは 4 月 14 日に開講する予定である．

$\boxed{1}$ $\mathbb{R}^n$ において, 点 $a \in \mathbb{R}^n$ の近傍で定義された実数値関数 f が a で連続であるとは,

$$(*) \begin{cases} \text{任意の } \varepsilon > 0 \text{ に対して,} \\ x \in \mathbb{R}^n, \quad \|x - a\| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon \\ \text{となる } \delta = \delta(a, \varepsilon) > 0 \text{ が存在する} \end{cases}$$

ことである. ただし, $\|\cdot\|$ は $\mathbb{R}^n$ のユークリッドノルムを表す. 以下の問いに答えよ.

(1) ある $a \in \mathbb{R}^n$ に対し条件 $(*)$ が成り立つとき, $\|y - a\| < \delta/2$ をみたす任意の $y \in \mathbb{R}^n$ について

$$x \in \mathbb{R}^n, \ \|x - y\| < \frac{\delta}{2} \implies |f(x) - f(y)| < 2\varepsilon$$

が成立することを示せ.

(2) 有界閉集合 $K \subset \mathbb{R}^n$ の近傍で定義された実数値関数 f がすべての $a \in K$ において連続であるとする. このとき, f は K 上で一様連続であること, すなわち任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$x, y \in K, \ \|x - y\| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

となる $\delta > 0$ が存在することを示せ.

$\boxed{2}$ a を正の実数とし, f を区間 $I = [-a, a]$ で定義された C^1 級関数とする. 以下の問いに答えよ.

(1) 実数 M で, 0 でない全ての $x \in I$ について $\left|\dfrac{f(x) - f(0)}{x}\right| \leq M$ となるものが存在することを示せ.

(2) I で定義された C^1 級関数 g に対し, I で定義された関数 $T(g)$ を

$$T(g)(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x g(t)\,dt, & x \neq 0 \\ g(0), & x = 0 \end{cases}$$

で定める. $T(g)$ も I で C^1 級であることを示せ.

(3) (1), (2) の記号で, $f_0 = f$ とし, $n \geq 1$ に対し $f_n = T(f_{n-1})$ で順に f_n を定める. 全ての $n \geq 0$ と $x \in I$ について, $|f_n(x) - f(0)| \leq \dfrac{1}{2^n} M|x|$ であることを示せ. 関数列 $\{f_n\}$ は I で 定数関数 $f(0)$ に一様収束するか? (理由も述べよ.)

$\boxed{3}$ 実数を成分に持つ $m \times n$ 行列 A で定義される線形写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(v \mapsto Av)$ に対して, 等式 $(*)$ $n = \operatorname{rank} A + \dim \operatorname{Ker} f$ が成り立つことが知られている. 以下ではこの事実を確認しよう.

$e_1, \ldots, e_n$ を $\mathbb{R}^n$ の基本ベクトルとし, $v_1, \ldots, v_p$ を $\operatorname{Ker} f$ の基底とする. 行列 A の列ベクトルを $a_1, \ldots, a_n$ とし, $r = \operatorname{rank} A$ とおく. $\operatorname{rank} A$ は A の列ベクトルのうち 1 次独立なものの最大個数であるから, $a_1, \ldots, a_n$ の中から r 個の 1 次独立なベクトル $a_{i_1}, \ldots, a_{i_r}$ $(1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n)$ を選ぶことができ, $\operatorname{rank} A = \dim \operatorname{Im} f$ である. 以下を証明せよ (これにより, $(*)$ は証明される).

(1) $e_{i_1}, \ldots, e_{i_r}, v_1, \ldots, v_p \in \mathbb{R}^n$ は 1 次独立である.

(2) $i_1, \ldots, i_r$ のどれとも異なる i に対して, a_i は $a_{i_1}, \ldots, a_{i_r}$ の 1 次結合で表すことができる.

(3) 任意の $v \in \mathbb{R}^n$ は $e_{i_1}, \ldots, e_{i_r}, v_1, \ldots, v_p$ の 1 次結合で表される.

$\boxed{4}$ n 次複素正方行列 A はエルミート行列 B, C により, $A = B + \sqrt{-1}C$ と表されているとする. ただし, n 次複素正方行列 X がエルミート行列であるとは, $X^* = X$ が成り立つことをいう. ここで, 複素行列 $X = [x_{ij}]$ に対し, X^* は X の随伴行列, すなわち (i, j)-成分が $\overline{x_{ji}}$ である行列であるとする. 以下の問いに答えよ.

(1) B, C を A と A^* を用いて表せ. また, B, C に対する条件 $BC = CB$ を A と A^* を用いて表せ.

以下, 条件 $BC = CB$ を仮定する.

(2) $v \in \mathbb{C}^n$ を 固有値 α をもつ B の固有ベクトルとする. Cv は 0 であるか, 固有値 α をもつ B の固有ベクトルであるかのいずれかであることを示せ.

(3) エルミート行列は対角化可能であることが知られている. このことを用いて, $n = 3$ で B が, λ, λ, μ $(\lambda \neq \mu)$ を対角成分とする対角行列である場合に, A が対角化可能であることを示せ.