2020年度予備テスト代替レポート

（2020年4月16日 9:00〜17:00 実施）

注意事項

(1) すべての提出用紙の左上に問題番号（$\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$のいずれか）を、右上に学生番号と氏名を記入してください。
(2) 数学的論証の表現力も採点対象です。**いきなり提出用紙に書くのではなく、草稿用紙でよく練ってから解答を書いてください。**（草稿用紙は提出しないでください。）
(3) 受験者の理解の正確さを計ることが予備テスト代替レポートの目的です。論証においては「明らかに」という表現は避け、要点を的確に記してください。
(4) もしも途中に解けない小問があっても、その結果を認めて後続の小問を解いて構いません。
(5) 各問3点満点の計12点満点で採点します。

2020 年度予備テスト代替レポート

$\boxed{1}$ $\mathbb{R}^2$ 上で定義された関数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^3}{x^2+y^2}\cos\dfrac{1}{x} & (x\neq 0),\\ 0 & (x=0)\end{cases}$$

について，次の問に答えよ．

(1) 関数 $f(x,y)$ は原点において偏微分可能であることを示せ．またその偏微分係数 $f_x(0,0)$ と $f_y(0,0)$ を求めよ．

(2) 関数 $f(x,y)$ に対して，

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-Ax-By}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$$

となる定数 A,B が存在することを示せ．

(3) $t\neq 0$ に対し $f_x(t,t)$ を求めよ．その結果を用いて，x に関する偏導関数 $f_x(x,y)$ が原点で連続でないことを示せ．

$\boxed{2}$ 次の問に答えよ．

(1) 区間 I 上で一様連続な実数値関数の列 $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ が I 上で関数 $f(x)$ に一様収束するとき，$f(x)$ も I 上で一様連続であることを示せ．

(2) a,b,c を実数とする．関数

$$g(x)=ax^2+bx+c$$

が $\mathbb{R}$ 上で一様連続であるための必要十分条件を求めよ．

(3) p,q,r を実数，$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ を実数列とし，$x\in\mathbb{R}$ に対し，

$$h(x)=px^2+qx+r,$$
$$h_n(x)=a_nx^2+b_nx+c_n\ (n\geq 0).$$

とおく．関数列 $\{h_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ が $\mathbb{R}$ 上で $h(x)$ に一様収束するための必要十分条件を求めよ．

$\boxed{3}$ $\mathbb{C}$ 上の線形写像 $f:V\to W$ に対し，

$$\operatorname{rank} f=\dim_{\mathbb{C}}(\operatorname{Im} f)$$

で f の階数を定義する．$\mathbb{C}$ 上の $m\times n$ 行列 A に対し，線形写像 $f_A:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^m$ を $f_A(x)=Ax$ で定義し，A の階数を

$$\operatorname{rank} A=\operatorname{rank}(f_A)$$

で定義する．この定義のもとに次の問に答えよ．

(1) $\mathbb{C}$ 上の $m\times n$ 行列 A，m 次正則行列 P，n 次正則行列 Q に対し，$\operatorname{rank}(PAQ)=\operatorname{rank} A$ が成り立つことを示せ．

(2) $\mathbb{C}$ 上の $m\times n$ 行列 A が行と列の基本変形で

$$\begin{pmatrix}E_r & O\\ O & O\end{pmatrix}$$

になったとする（E_r は r 次単位行列，O は零行列）．このとき，$\operatorname{rank} A=r$ を示せ．

(3) $\mathbb{C}$ 上の $m\times n$ 行列 A に対し，$\operatorname{rank}({}^tA)=\operatorname{rank} A$ となることを示せ．

$\boxed{4}$ V を体 K 上の有限次元ベクトル空間とし，$f:V\to V$ を線形写像とする．次の問に答えよ．

(1) V の部分空間の昇鎖と降鎖

$$\operatorname{Ker}(f)\subseteq\operatorname{Ker}(f^2)\subseteq\cdots\subseteq V,$$
$$\cdots\subseteq\operatorname{Im}(f^2)\subseteq\operatorname{Im}(f)\subseteq V$$

があることに注意する（ただし f^i は f を i 回合成した写像を表す）．ある正の整数 t が存在し，任意の正の整数 i に対し

$$\operatorname{Ker}(f^t)=\operatorname{Ker}(f^{t+i}),$$
$$\operatorname{Im}(f^t)=\operatorname{Im}(f^{t+i})$$

となることを示せ．

(2) (1) の t に対し $V_0=\operatorname{Ker}(f^t)$, $V_1=\operatorname{Im}(f^t)$ とおく．$V=V_0\oplus V_1$ であることを示せ．

(3) (2) の V_i $(i=0,1)$ に対し，$f(V_i)\subseteq V_i$ なので，線形写像 $f|_{V_i}:V_i\to V_i$ が定まる．$f|_{V_0}$ はべき零，$f|_{V_1}$ は同型であることを示せ．