

2019年度予備テスト 2019年4月9日実施

試験について

1. 試験終了時刻は黒板に記載する。
2. 座席表に従って着席し、学生証を机に出しておくこと。
3. 途中退室は試験開始後 90 分経過してから許可する。
4. 問題用紙：1 枚・答案用紙：4 枚・草稿用紙：4 枚。
5. 答案用紙の追加は認めない。
6. 答案用紙のみを回収する。
7. 各問 3 点満点の計 12 点満点であり、9 点以上を合格とする。
8. 不正行為は決してしないこと。
9. 携帯電話の電源は切っておくこと。

答案作成についての注意事項

1. 全ての答案用紙の左上に問題番号を、右上に学生番号と氏名を記入すること。
2. 答案は各問題について一枚を使用すること。
3. 答案用紙の裏面を使用してもよい。表面の最下行にその旨を明記すること。
4. 数学的論証の表現力も採点対象である。**いきなり答案用紙に書くのではなく、草稿用紙でよく練ってから解答を書くこと。**
5. 解答者の理解の正確さを示すことがこのテストの目的である。論証においては「明らかに」という表現は避け、要点を的確に記すこと。
6. もしも途中で解けない小問があっても、その結果を認めて後続の小問を解いてよい。

試験後の注意事項

1. 合否は 4 月 12 日から多元数理科学研究科教育研究支援室にて確認できる。
2. 不合格のときは基礎演習クラスを受講せねばならない。基礎演習クラスは 4 月 17 日のガイダンスより開始する。

2019 年度予備テスト

1 f を开区間 $(0, 1)$ で定義された函数とする. f が一様連続であるとは,

任意の $\epsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在して, $|x - y| < \delta$ となる任意の $x, y \in (0, 1)$ に対して, $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ が成り立つ

ことである. このとき, 次の間に答えよ.

- $f(x) = \sin(1/x)$ とするとき, f は一様連続か? 理由とともに答えよ.
- f が一様連続ならば有界であることを示せ. ここで, f が有界であるとは, ある正実数 $M > 0$ が存在して, 任意の $x \in (0, 1)$ に対して, $|f(x)| < M$ が成り立つことである.
- f が一様連続ならば, $x_n \in (0, 1)$ かつ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ となる任意の数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して, $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ がコーシー列になることを示せ.

2 次の間に答えよ.

- 次の広義積分が収束するための実数 p の満たすべき必要十分条件を求めよ:

$$\int_0^1 (1-x)^p dx$$

- 次の広義積分が収束することを示せ

$$\int_0^1 \frac{1}{[x(1-x)]^{1/3}} dx$$

- 次の広義積分が収束しないことを示せ:

$$\int_0^{\infty} \frac{2 + \sin e^x}{x} dx$$

3 V と W を d 次元実線型空間 \mathbb{R}^d の部分空間とする. 和 $V+W$ と交わり $V \cap W$ も \mathbb{R}^d の部分空間となる. \mathbb{R}^d の元 $u_1, \dots, u_\ell, v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_n$ を次のように選ぶ:

- u_1, \dots, u_ℓ は $V \cap W$ の基底である.
- $u_1, \dots, u_\ell, v_1, \dots, v_m$ は V の基底である.
- $u_1, \dots, u_\ell, w_1, \dots, w_n$ は W の基底である.

このとき, 次の間に答えよ.

- 和 $V+W$ の任意の元が $u_1, \dots, u_\ell, v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_n$ の線型結合で表されることを示せ.
- 元 $u_1, \dots, u_\ell, v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_n$ は線型独立であることを示せ.
- 和集合 $V \cup W$ は \mathbb{R}^d の部分空間となるか? 理由とともに答えよ.

4 二次以下の実数係数多項式の全体からなる実線型空間を V として, V 上の線型変換 $D: V \rightarrow V$ を

$$f(x) \mapsto \frac{d}{dx} [(1+x)f(x)]$$

と定める. このとき, 次の間に答えよ.

- $\text{Ker } D$ と $\text{Im } D$ を求めよ.
- V の基底 $\{1, 1+2x, 2x+3x^2\}$ に関する D の表現行列を求めよ.
- D の固有空間の全てについて, それぞれの基底を一組ずつ求めよ.