2018年度予備テスト

(2018年4月9日 (月))

試験に関する注意事項

(1) 試験時間 (3時間) は黒板に記載する.

(2) 試験開始後, 1時間半経過するまでは中途退出してはいけない.

(3) 問題用紙は3ページ, 答案用紙は4枚, 草稿用紙は4枚である. そのうち, 答案用紙のみを回収する. 他は持ち帰ること.

(4) 各問3点満点, 計12点満点とし, 9点以上を合格とする.

(5) リラックスして自分の現在の力を十分に発揮すること. また, 不正行為は決してしないこと.

(6) 携帯電話の電源は切っておくこと.

答案作成に関する注意事項

(1) 各答案用紙の左上に問題番号, 右上に学生番号, 氏名を記入すること.

(2) 答案は問題毎 (原則として1枚以内) に作成すること.

(3) 裏面を使用するときは, 表面の最後にその旨を明記すること.

(4) 数学的論証の表現力も採点対象とする. いきなり答案用紙に書くのではなく, 草稿用紙でよく練ってから解答を書くこと.

(5) あなたが正確に理解しているかを示してもらうことがこのテストの目的であるので, 論証においては「明らかに」という表現は避け, 論証の要点を的確に記すこと. また, 解の導出においては導出過程の要点を的確に記すこと.

(6) もし途中に解けない小問があっても, その結果を認めて後続の小問を解いて構わない.

試験後の注意事項

(1) 合否については, 4月12日 (木) より多元数理科学研究科教育研究支援室にて確認することができる. 答案の返却も4月12日 (木) より教育研究支援室にて行う.

(2) 不合格となってしまった場合, 基礎演習クラスを受講する必要がある. 基礎演習クラスは4月18日 (水) のガイダンスより開始するので, 不合格者は必ず出席すること.

$\boxed{1}$ 数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ が有界である (すなわち, ある正数 M が存在して, 任意の n に対して $|a_n| \leq M$ が成り立つ) とし, べき級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \cdots$ を考える. 以下の問いに答えよ.

(1) $|x| < 1$ となる実数 x について級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は絶対収束することを示せ.

(2) 開区間 $(-1, 1)$ 上の関数 f_N $(N = 1, 2, \ldots)$ および f を

$$f_N(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n, \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad x \in (-1, 1)$$

によって定める. このとき $x \in (-1, 1)$ に対し

$$|f_N(x) - f(x)| \leq \frac{M|x|^{N+1}}{1 - |x|}$$

であることを示し, これを用いて任意の $R \in (0, 1)$ に対して, 閉区間 $[-R, R]$ 上で f_N は f に一様収束することを示せ.

(3) 関数 f は開区間 $(-1, 1)$ 上で連続であることを示せ.
(ヒント: ある区間上で連続関数の列がある関数に一様収束するとき, その区間で極限の関数も連続となることは証明せずに用いてよい. また, 多項式関数は連続であるということも証明せずに用いてよい.)

$\boxed{2}$ (1) 区間 I 上で定義された関数 f が I 上で一様連続であるとは,

$(*)$ $\quad \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0\ \text{ s.t. }\ \forall x, y \in I,\ |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

が成り立つことをいう. 以下の問いに答えよ.

(i) f が I 上一様連続でないこと, すなわち $(*)$ の否定を ε-δ 式に述べよ.
また, $g(x) = \dfrac{1}{x-1}$ は区間 $(1, 2)$ 上一様連続ではないことを示せ.

(ii) $h(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$ は区間 $[2, \infty)$ 上一様連続であることを示せ.

(2) $\mathbb{R}^n$ 上で定義された関数 f は, $\mathbb{R}^n$ の有界閉集合 K に対し条件

$(**)$ $\quad \forall a \in K,\ \exists \delta_a > 0,\ \exists M_a > 0\ \text{ s.t. }\ \forall x \in B_{\delta_a}(a), \quad |f(x)| \leq M_a$

をみたすとする. ただし, $B_\delta(a) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| < \delta\}$, $\|\cdot\|$ は $\mathbb{R}^n$ のユークリッドノルムを表す. このとき f は K 上で有界であることを示せ.

$\boxed{3}$ V を体 K 上のベクトル空間, W を V の部分ベクトル空間とする. V の元 v, v' の間の 2 項関係 $\sim$ を

$$v \sim v' \iff v - v' \in W$$

によって定義する. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) $\sim$ は同値関係であることを示せ.
(即ち, (i) 反射律 $v \sim v$, (ii) 対称律 $v \sim v' \Longrightarrow v' \sim v$, (iii) 推移律 $v \sim v'$, $v' \sim v'' \Longrightarrow v \sim v''$ の 3 つが成り立つことを示せ. ただし, W に関するどのような条件をどう使ったかわかるように書くこと.)

以下では, V の元の同値関係 $\sim$ による同値類の集合 $V/\sim$ を考える. また, $v \in V$ の同値類を $[v]$ $(\in V/\sim)$ と表す.

(2) V の元 v, v', w, w' が $v \sim v'$, $w \sim w'$ を満たすとき, 任意の K の元 α, β に対して $\alpha v + \beta w \sim \alpha v' + \beta w'$ であることを示せ.

これより, $[v]$, $[w] \in V/\sim$ と $\alpha, \beta \in K$ に対して $\alpha[v] + \beta[w] \in V/\sim$ を

$$\alpha[v] + \beta[w] = [\alpha v + \beta w]$$

により定めることができる. さらに, ここで定めた和とスカラー倍によって $V/\sim$ は K 上のベクトル空間になる. これを V の W による商ベクトル空間と呼び V/W と表す.

(3) V を有限次元とする. W の基底 $\langle e_1, e_2, \cdots, e_r \rangle$ を含む V の基底 $\langle e_1, \cdots, e_r, e_{r+1}, \cdots e_n \rangle$ をとる. このとき $\langle [e_{r+1}], \cdots, [e_n] \rangle$ は V/W の基底であることを示せ. (これより $\dim V = \dim W + \dim(V/W)$ であることがわかる.)

$\boxed{4}$　K を体とする.

(1) K 上のベクトル空間の間の線形写像 $f : V \to W$ に対し，$\widetilde{f} :\ V/(\mathrm{Ker}\, f) \ \to \mathrm{Im}\, f$ を

$$\widetilde{f}([v]) = f(v), \quad [v] \in V/(\mathrm{Ker} f)$$

により定める. このとき, 以下の問いに答えよ.

(i) $\widetilde{f}$ は well-defined であること, 即ち同値類の代表元の取り方によらずに写像が定まることを示せ. また, $\widetilde{f}$ が線形であることを示せ.

(ii) 次の同型が成り立つことを示せ.

$$V/(\mathrm{Ker}\, f) \cong \mathrm{Im}\, f.$$

V が有限次元のとき，(1) と $\boxed{3}$ (3) より次の等式が成り立つことがわかる.

$$\dim(\mathrm{Ker}\, f) + \dim(\mathrm{Im}\, f) = \dim V.$$

この等式を利用して次の問いに答えよ.

(2) V は K 上の有限次元ベクトル空間，W_1, W_2 はその部分空間であり, $V = W_1 \oplus W_2$, 即ち $V = W_1 + W_2$ かつ $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ をみたしているとする.

(i) V の任意の元 v は

$$v = w_1 + w_2, \quad w_1 \in W_1,\ w_2 \in W_2$$

と一意に表されることを示せ.

(ii) 次の等式が成り立つことを示せ.

$$\dim W_1 + \dim W_2 = \dim V.$$