

# 2017 年度予備テスト

## (2017 年 4 月 7 日(金))

### 試験に関する注意事項

- (1) 試験時間(3時間)は黒板に記載する。
- (2) 試験開始後, 1時間半経過するまでは中途退出してはいけない。
- (3) 問題用紙は両面1枚, 答案用紙は4枚, 草稿用紙は4枚である。そのうち, 答案用紙のみを回収する。他は持ち帰ること。
- (4) 各問3点満点, 計12点満点とし, 9点以上を合格とする。
- (5) リラックスして自分の現在の力を十分に発揮すること。また, 不正行為は決してしないこと。
- (6) 携帯電話の電源は切っておくこと。

### 答案作成に関する注意事項

- (1) 各答案用紙の左上に問題番号, 右上に学生番号, 氏名を記入すること。
- (2) 答案は問題毎(原則として1枚以内)に作成すること。
- (3) 裏面を使用するときは, 表面の最後にその旨を明記すること。
- (4) 数学的論証の表現力も採点対象とする。いきなり答案用紙に書くのではなく, 草稿用紙でよく練ってから解答を書くこと。
- (5) あなたが正確に理解しているかを示してもらうことがこのテストの目的であるので, 論証においては「明らかに」という表現は避け, 論証の要点を的確に記すこと。また, 解の導出においては導出過程の要点を的確に記すこと。
- (6) もし途中で解けない小問があっても, その結果を認めて後続の小問を解いて構わない。

### 試験後の注意事項

- (1) 合否については, 4月11日(火)より多元数理科学研究科教育研究支援室にて確認することができる。答案の返却も4月11日(火)より教育研究支援室にて行う。
- (2) 不合格となってしまった場合, 基礎演習クラスを受講する必要がある。基礎演習クラスは4月12日(水)のガイダンスより開始するので, 不合格者は必ず出席すること。



1 区間  $I$  上で定義された関数列  $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$  が  $I$  上で関数  $f$  に一様収束するとは,

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} \text{任意の } \epsilon > 0 \text{ に対して, ある自然数 } N \text{ が存在して,} \\ n \geq N \text{ なる任意の自然数 } n \text{ と任意の } x \in I \text{ について,} \\ |f(x) - f_n(x)| < \epsilon \text{ が成り立つ} \end{array} \right.$$

ことである. 以下の問いに答えよ.

(1) 区間  $I$  上で連続な実数値関数の列  $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$  が,  $I$  上の関数  $f$  に一様収束しているならば,  $f$  もまた連続であることを示せ.

(ヒント:  $|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)|$  を用いる.)

(2)  $(0, 1)$  上の関数列  $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$  および関数  $g$  を以下のように定義する.

$$g_n(x) = (1-x) \sum_{k=0}^n x^k, \quad g(x) = 1.$$

このとき以下の問いに答えよ.

(ア)  $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$  は  $(0, 1)$  上で  $g$  に各点収束することを  $\epsilon$ - $N$  論法を用いて示せ.

(イ)  $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$  が区間  $I$  上で  $f$  に一様収束しないことの定義 (つまり  $(*)$  の否定) を  $\epsilon$ - $N$  論法を用いて書き, それに基づいて  $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$  が  $(0, 1)$  上で  $g$  に一様収束しないことを示せ.

2 関数  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  に対して,  $f$  のグラフ  $G_f$  とは, 次で定義される  $\mathbb{R}^2$  の部分集合である:

$$G_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x)\}.$$

これについて, 以下の問いに答えよ.

(1) 「 $x, y \in \mathbb{R}$ , 実数列  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  に対して  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  かつ  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = y$  ならば  $f(x) = y$ 」が常に成り立つことは,  $G_f$  が  $\mathbb{R}^2$  内の閉集合であることと同値であることを示せ.

(2)  $f$  が連続ならば  $G_f$  は  $\mathbb{R}^2$  の閉集合であることを示せ.

(3)  $G_f$  が  $\mathbb{R}^2$  の閉集合であっても  $f$  は連続とは限らないことを次の例で確かめよ:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & (x \neq 0), \\ 0 & (x = 0). \end{cases}$$

(注意:  $G_f^+ := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 1/x, x > 0\}$  について,  $1/x$  は  $x > 0$  で連続だから (2) より  $G_f^+$  は閉集合という論証は誤り. (2) の仮定は  $f \in C(\mathbb{R})$  であり, 例えば,  $G_1^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 1, x > 0\}$  がその反例となる.)

3  $V$  を体  $K$  上の有限次元ベクトル空間とし,  $V$  から  $K$  への線形写像全体の集合を  $V^*$  で表す.  $\varphi, \psi \in V^*, a \in K$  に対して, 和  $\varphi + \psi \in V^*$ , スカラー倍  $a\varphi \in V^*$  を

$$(\varphi + \psi)(v) = \varphi(v) + \psi(v), \quad (a\varphi)(v) = a(\varphi(v)) \quad (v \in V)$$

と定めることにより,  $V^*$  はベクトル空間となる. 以下の問いに答えよ.

- (1)  $v_1, \dots, v_n$  を  $V$  の基底としたとき, これを用いて  $V^*$  の基底を 1 組作れ.
- (2)  $V^{**} := (V^*)^*$  を考えたとき,

$$\lambda_V : V \rightarrow V^{**}, \quad \lambda_V(v) = (f \mapsto f(v)) \quad (v \in V)$$

が同型写像であることを示せ.

- (3) 写像

$$(\lambda_V)^* : V^{***} \rightarrow V^*, \quad (\lambda_V)^*(\xi) = \xi \circ \lambda_V \quad (\xi \in V^{***})$$

が同型写像であることを示し,  $(\lambda_V)^*$  の逆写像を具体的に与えよ.

4 実数を成分に持つ  $m \times n$  行列  $A$  で定義される線形写像  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  ( $v \mapsto Av$ ) に対して, 等式

$$(*) \quad n = \text{rank } A + \dim \text{Ker } f$$

が成り立つことが知られている. 以下ではこの事実を確認しよう.

$e_1, \dots, e_n$  を  $\mathbb{R}^n$  の基本ベクトルとし,  $v_1, \dots, v_p$  を  $\text{Ker } f$  の基底とする. 行列  $A$  の列ベクトルを  $a_1, \dots, a_n$  とし,  $r = \text{rank } A$  とおく.  $\text{rank } A$  は  $A$  の列ベクトルのうち 1 次独立なものの最大個数であるから,  $a_1, \dots, a_n$  の中から  $r$  個の 1 次独立なベクトル

$$a_{i_1}, \dots, a_{i_r} \quad (1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n)$$

を選ぶことができ,  $\text{rank } A = \dim \text{Im } f$  である. 以下を証明せよ (これにより,  $(*)$  は証明される).

- (1)  $e_{i_1}, \dots, e_{i_r}, v_1, \dots, v_p \in \mathbb{R}^n$  は 1 次独立である.
- (2)  $i_1, \dots, i_r$  のどれとも異なる  $i$  に対して,  $a_i$  は  $a_{i_1}, \dots, a_{i_r}$  の 1 次結合で表すことができる.
- (3) 任意の  $v \in \mathbb{R}^n$  は  $e_{i_1}, \dots, e_{i_r}, v_1, \dots, v_p$  の 1 次結合で表される.